

УДК 514.7

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_54](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_54)

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ E_5

Шамшиева Гүлмира Асилидиновна

Ошский государственный университет

gshamshieva@oshsu.kg

Ош, Кыргызстан

Аннотация. В области $\Omega \subset E_5$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 данного семейства. Подвижной репер $\mathcal{R}$ пространства E_5 выбран так, чтобы он являлся репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии ω^5 сети Френе инвариантным образом определяется псевдофокус F_5^4 . Когда точка X смещается в области Ω , точка F_5^4 описывает свою область Ω_5^4 . Таким образом определяется частичное отображение $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$ такое, что $f_5^4(X) = F_5^4$. Рассмотрены пары трехмерных распределений $\Delta_{(ijk)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$, i, j, k – различны) в пространстве E_5 . В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе, доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии принадлежащие трехмерным распределениям являлись квазидвойными линиями пары трехмерных распределений в частичном отображении f_5^4 евклидова пятимерного пространства E_5 .

Ключевые слова: евклидова пространство, распределение, квазидвойная линия, сеть Френе, псевдофокус.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF QUASI- DOUBLE LINES OF A PAIR OF DISTRIBUTIONS IN E_5

Shamshieva Gulmira Asilidinovna

Osh State University

gshamshieva@oshsu.kg

Osh, Kyrgyzstan

Abstract. In the domain $\Omega \subset E_5$ consider a set of smooth lines such that through each point $X \in \Omega$ there passes exactly one line ω^1 from this set. The moving frame $\mathcal{R}$ is a Frenet frame [1] associated with the line ω^1 of the given set. The integral lines of the vector fields e_i form the Frenet net Σ_5 [1]. There exists a point F_5^4 on the tangent of the line ω^5 of the Frenet net. When the point X moves within the domain Ω , the point F_5^4 describes out its domain Ω_5^4 in E_5 . The partial mapping is defined $f_5^4(X) = F_5^4$ such that $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$ such that $f_5^4(X) = F_5^4$. Pairs of 3-dimensional distributions are considered: $\Delta_{(ijk)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$, i, j, k – different) in the $\Omega \subset E_5$. In the case when the Frenet net is a cyclic Frenet net, lines belonging to 3-dimensional distributions are considered. Necessary and sufficient conditions are proved for these lines to be quasi-double lines of a pair of 3-dimensional distributions in the partial mapping f_5^4 .

Keywords: quasi-doubl, distribution, Frenet net, partial mapping, tangent vector, geometry, conditions, surface.

Введение

В области Ω пространства E_5 заданы семейства линий таких, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна и только одна линия каждого семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = \overline{1, 5})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе [1] Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям сети Σ_5 , формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3)

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства(3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_\ell^j - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [2]отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_\ell^j - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \wedge \omega_\ell^j + \Lambda_{lj}^k \wedge \omega_i^\ell) \omega^m \quad (5)$$

отсюда

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \wedge \omega_\ell^j + \Lambda_{lj}^k \wedge \omega_i^\ell. \quad (6)$$

Система величин $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид

$$d_1 \vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1 \vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1 \vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$d_1 \vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5;$$

$$d_1 \vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4.$$

$$\Lambda_{ij}^i = 0 (i < j, i = 1, 2, 3, j = 4, 5)$$

$$\Lambda_{ij}^{i+1} = 0 (i < j, i = 1, 2, 3, k_4^1 = \Lambda_4^2)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5$ – первая, вторая, третья, ..., четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус F_i^j ($i \neq j$) [3] касательной к линии ω^1 сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i} \vec{e}_i.$$

В каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существует по 4 псевдофокуса: когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_i^j описывает свою область $\Omega_i^j \subset E_5$. В результате которого получается частичное отображение $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$ такое, что $f_i^j(X) = F_i^j$.

Результаты

Псевдофокус $\vec{F}_5^4 \in (X, \vec{e}_5)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_5^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_5 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{54}^5} \vec{e}_5. \quad (7)$$

Дифференцируем равенство (1):

$$d\vec{F}_5^4 = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{54}^4}\right) \vec{e}_5 - \frac{1}{\Lambda_{54}^4} d\vec{e}_5.$$

Используя деривационные формулы $d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k$ репера $\mathcal{R}$, структурные уравнения евклидова пространства $D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i$, $D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k$, $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$, также формул

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j \text{ и } d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{i\ell}^k \Lambda_{jm}^\ell + \Lambda_{\ell j}^k \Lambda_{im}^\ell) \omega^m,$$

отсюда получим:

$$d\vec{F}_5^4 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{D_{54m}^4 \omega^m}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{5m}^i \omega^m}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i,$$

$$\text{где } D_{54m}^4 = \Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4 \Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4 \Lambda_{5m}^\ell.$$

Вектор $d\vec{F}_5^4$ перепишем в виде:

$$d\vec{F}_5^4 = \left[\vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^2 + \left[\vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^4 + \left[\vec{e}_5 + \frac{D_{545}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i \right] \omega^5.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_3 &= \vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_4 &= \vec{e}_4 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i; \\ \vec{d}_5 &= \vec{e}_5 + \frac{D_{545}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Учитывая, что сеть Френе является циклической сетью Френе, отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_4 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_2 &= -\frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_4 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_3 &= -\frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_4 + \vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_4 &= -\frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \vec{e}_5; \\ \vec{d}_5 &= -\frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4} \vec{e}_1 + \left[1 + \frac{D_{545}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2} \right] \vec{e}_5. \end{aligned} \tag{8}$$

Векторы $\vec{d}_i$ ($i = \overline{1,5}$) в общем случае линейно независимы. К области Ω_5^4 присоединим подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_5^4, \vec{d}_i)$.

В данной работе рассмотрены трехмерные распределения $\Delta_{(123)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Delta_{(124)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$, $\Delta_{(234)} = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\Delta_{(134)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ и их образы в частичном отображении $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$: $\Delta'_{(123)} = f_5^4(\Delta_{(123)})$, $\Delta'_{(124)} = f_5^4(\Delta_{(124)})$, $\Delta'_{(234)} = f_5^4(\Delta_{(234)})$, $\Delta'_{(134)} = f_5^4(\Delta_{(134)})$.

Рассмотрим линию $\gamma \subset \Delta_{(123)}$, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$ с касательным вектором $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\gamma}$ к линии $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ в виде: $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{d}_1 + \gamma^2 \vec{d}_2 + \gamma^3 \vec{d}_3$. Учитывая формулу (2) отсюда получим:

$$\vec{\gamma} = (\gamma^1 + \gamma^2 d_2^1 + \gamma^3 d_3^1) \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + (\gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4 + \gamma^3 d_3^4) \vec{e}_4 + (\gamma^1 d_1^5 + \gamma^2 d_2^5 + \gamma^3 d_3^5) \vec{e}_5, \text{ где } d_i^j - j \text{ тая координата вектора } \vec{d}_i.$$

Пусть линии γ и $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары распределений

$(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в частичном отображении $f_5^4: \Omega \rightarrow \Omega_5^4$, т.е. $\vec{\gamma}, \vec{\gamma} \in \Delta_{(123)}$. Из этого условия следует:

$$\begin{cases} \gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4 + \gamma^3 d_3^4 = 0; \\ \gamma^1 d_1^5 + \gamma^2 d_2^5 + \gamma^3 d_3^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (8) отсюда имеем:

$$\begin{cases} \gamma^1 \Lambda_{51}^4 + \gamma^2 \Lambda_{52}^4 + \gamma^3 \Lambda_{53}^4 = 0; \\ \gamma^1 D_{541}^4 + \gamma^2 D_{542}^4 + \gamma^3 D_{543}^4 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $D_{54m}^4 = \Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4 \Lambda_{4m}^1 + \Lambda_{\ell 4}^4 \Lambda_{5m}^\ell$.

Отсюда найдем:

$$\gamma^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}; \gamma^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^4 & \Lambda_{51}^4 \\ D_{543}^4 & D_{541}^4 \end{vmatrix}; \gamma^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{51}^4 & \Lambda_{52}^4 \\ D_{541}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Обратно, если координаты касательного вектора $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3$ к линии $\gamma \subset \Delta_{(123)}$ удовлетворяют условиям (4) то линии γ , $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Рассмотрим линию β , принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$ с касательным

векторам $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\beta}$ к линии $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ в виде $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{d}_1 + \beta^2 \vec{d}_2 + \beta^4 \vec{d}_4$. Учитывая формул (2) отсюда получим: $\vec{\beta} = (\beta^1 + \beta^2 d_2^1 + \beta^4 d_4^1) \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + (\beta^1 d_1^4 + \beta^2 d_2^4) \vec{e}_4 + (\beta^1 d_1^5 + \beta^2 d_2^5 + \beta^4 d_4^5) \vec{e}_5$.

Пусть линии β и $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(124)}, \Delta'_{(124)})$ в частичном отображении f_5^4 , т.е. $\vec{\beta}, \vec{\beta} \in \Delta_{(124)}$. Из этого условия получим:

$$\beta^1 d_1^5 + \beta^2 d_2^5 + \beta^4 d_4^5 = 0.$$

Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\beta^1 D_{541}^4 + \beta^2 D_{542}^4 + \beta^4 D_{544}^4 = 0. \quad (11)$$

Обратно, если имеет место равенство (5), то линии β и $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(124)}, \Delta'_{(124)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Теперь рассмотрим линию $\delta \subset \Delta_{(234)}$ с касательным вектором: $\vec{\delta} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\delta}$ к линии $\bar{\delta} = f_5^4(\delta)$ в виде $\vec{\delta} = \delta^2 \vec{d}_2 + \delta^3 \vec{d}_3 + \delta^4 \vec{d}_4$.

Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\delta} = & (\delta^2 d_2^1 + \delta^3 d_3^1 + \delta^4 d_4^1) \vec{e}_1 + \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + (\delta^2 d_2^4 + \delta^3 d_3^4) \vec{e}_4 + \\ & + (\delta^2 d_2^5 + \delta^3 d_3^5 + \delta^4 d_4^5) \vec{e}_5. \end{aligned}$$

Из условия $\vec{\delta}, \vec{\delta} \in \Delta_{(234)}$ следует:

$$\begin{cases} \delta^2 d_2^1 + \delta^3 d_3^1 + \delta^4 d_4^1 = 0; \\ \delta^2 d_2^5 + \delta^3 d_3^5 + \delta^4 d_4^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (11) из последнего получим:

$$\begin{cases} \delta^2 \Lambda_{52}^1 + \delta^3 \Lambda_{53}^1 + \delta^4 \Lambda_{54}^1 = 0; \\ \delta^2 D_{542}^4 + \delta^3 D_{543}^4 + \delta^4 D_{544}^4 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

Отсюда найдем:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{54}^1 \\ D_{543}^4 & D_{544}^4 \end{vmatrix}; \delta^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{54}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ D_{544}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}; \delta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Обратно, если координаты касательного вектора

$\vec{\delta} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$ к линии $\delta \subset \Delta_{(234)}$ удовлетворяют условиям (7), то линии δ , $\bar{\delta} = f_5^4(\delta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(234)}, \Delta'_{(234)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Рассмотрим теперь линию $\ell \subset \Delta_{(134)}$ с касательным вектором: $\vec{\ell} = \ell^1 \vec{e}_1 + \ell^3 \vec{e}_3 + \ell^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\ell}}$ к линии $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ в виде $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1 \vec{d}_1 + \ell^3 \vec{d}_3 + \ell^4 \vec{d}_4$.

Учитывая формул (2) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\ell}} = (\ell^1 + \ell^3 d_3^1 + \ell^4 d_4^1) \vec{e}_1 + \ell^3 \vec{e}_3 + (\ell^1 d_1^4 + \ell^3 d_3^4) \vec{e}_4 + (\ell^1 d_1^5 + \ell^3 d_3^5 + \ell^4 d_4^5) \vec{e}_5,$$

Где d_i^j – j-тая координата вектора $\vec{d}_i$.

Пусть линии ℓ и $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(134)}, \Delta'_{(134)})$ в частичном отображении f_5^4 , т.е. $\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}} \in \Delta_{(134)}$. Из этого условия следует:

$$\ell^1 d_1^5 + \ell^3 d_3^5 + \ell^4 d_4^5 = 0.$$

Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\ell^1 D_{541}^4 + \ell^3 D_{543}^4 + \ell^4 D_{544}^4 = 0. \quad (14)$$

Обратно, если имеет место равенство (8), то линии ℓ , $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(134)}, \Delta'_{(134)})$ в частичном отображении f_5^4 .

Из вышеизложенного следует справедливость следующей теоремы.

Теорема.

1) Линия $\gamma \subset \Delta_{(123)}$ и $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ являются квазидвойными линиями пары трехмерных распределений $(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора $\vec{\gamma}$ к линии $\gamma \subset \Delta_{(123)}$ удовлетворяют условиям

$$\gamma^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}; \gamma^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^4 & \Lambda_{51}^4 \\ D_{543}^4 & D_{541}^4 \end{vmatrix}; \gamma^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{51}^4 & \Lambda_{52}^4 \\ D_{541}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix};$$

2) Линии $\beta \subset \Delta_{(124)}$ и $\bar{\beta} = f_5^4(\beta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(124)}, \Delta'_{(124)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\beta^1 D_{541}^4 + \beta^2 D_{542}^4 + \beta^4 D_{544}^4 = 0;$$

3) Линия $\delta \subset \Delta_{(234)}$ и $\bar{\delta} = f_5^4(\delta)$ являются квазидвойными линиями пары распределений [6] $(\Delta_{(234)}, \Delta'_{(234)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора $\vec{\delta}$ к линии $\delta \subset \Delta_{(234)}$ удовлетворяют условиям

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{54}^1 \\ D_{543}^4 & D_{544}^4 \end{vmatrix}; \delta^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{54}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ D_{544}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}; \delta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix};$$

4) Линии $\ell \subset \Delta_{(134)}$ и $\bar{\ell} = f_5^4(\ell)$ являются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(134)}, \Delta'_{(134)})$ в частичном отображении f_5^4 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\ell^1 D_{541}^4 + \ell^3 D_{543}^4 + \ell^4 D_{544}^4 = 0.$$

Выясним геометрический смысл формул (4); (5); (7); (8).

Рассмотрим систему уравнений (3) с тремя неизвестными $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$:

$$\begin{cases} \gamma^1 \Lambda_{51}^4 + \gamma^2 \Lambda_{52}^4 + \gamma^3 \Lambda_{53}^4 = 0; \\ \gamma^1 D_{541}^4 + \gamma^2 D_{542}^4 + \gamma^3 D_{543}^4 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Каждое уравнение этой системы определяет двумерную плоскость в трехмерном подпространстве пространства E_5 , натянутом на базисных векторах: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Сама система (3) определяет прямую, которая является пересечением этих двух плоскостей. Координаты направляющего вектора прямой пересечения двух плоскостей определяется по формуле (4). Этот вектор и есть касательный вектор $\vec{\gamma}$ к линии $\gamma \subset \Delta_{(123)}$, которая со своим образом $\bar{\gamma} = f_5^4(\gamma)$ в частичном отображении f_5^4 , является квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(123)}, \Delta'_{(123)})$ в этом частичном отображении f_5^4 .

Аналогично выясняется геометрический смысл равенств (7).

Рассмотрим равенство:

$$\beta^1 D_{541}^4 + \beta^2 D_{542}^4 + \beta^4 D_{544}^4 = 0. \quad (11)$$

Где $\beta^1, \beta^2, \beta^4$ — координаты касательного вектора к линии $\beta \subset \Delta_{(124)}$. Через $\vec{M}$ обозначим следующий вектор:

$$\vec{M} = D_{541}^4 \vec{e}_1 + D_{542}^4 \vec{e}_2 + D_{544}^4 \vec{e}_4.$$

Тогда равенство (11) означает, что векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{M}$ — ортогональны.

Аналогично выясняется геометрический смысл равенства (8).

Вывод

В настоящей работе в евклидовом пятимерном пространстве исследованы пары трёхмерных распределений в условиях, когда сеть Френе является циклической сетью Френе.

Доказаны необходимые и достаточные условия существования квазидвойных линий пары трёхмерных распределений. Тем самым получена полная характеристика данного геометрического явления в рассматриваемом отображении.

Таким образом, задача о существовании квазидвойных линий пары трёхмерных распределений в рассматриваемом частичном отображении евклидова пространства полностью решена в случае циклической сети Френе. Полученные результаты расширяют теорию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств и могут быть использованы при дальнейшем исследовании геометрии распределений и многомерных сетей.

Список литературы

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М. : Наука, 1967. — 644 с.
2. Фиников С. О. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.—Л. : Гостехиздат, 1948. — 432 с.
3. Базылев В. Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник. — 1966. — № 4. — С. 475–491.
4. Матиева Г., Абдуллаева Ч. Х., Папиева Т. М. Введение в геометрию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств : монография. — Ош, 2024. — 172 с.
5. Матиева Г., Абдуллаева С., Ахмедов А. О существовании квазидвойных линий частичного отображения пространства E^n // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Т. 1366, № 1. — 012061.
6. Матиева Г., Абдуллаева С., Артыкова З. Существование квазидвойных линий пары $(f_5^5; \varphi^{135})$ в евклидовом пространстве E^5 // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Т. 1988, № 1. — 01208.