

УДК 517.956.6

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2\(7\)_43](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_43)

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Сопуев Акылбек Адахимжанович

Ошский государственный университет

723500, ул. Алымбек Датка, 331, Ош, Кыргызстан

<https://orcid.org/0009-0006-6059-0008>, sopuevv@gmail.com

Аннотация. Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с двумя линиями изменения типа $y=0$ и $x=0$. На линии изменения типа $y=0$ и $x=0$ искомая функция и её нормальные производные непрерывны. Методом исключения системы уравнений, полученных из параболической и гиперболической части областей на линии $y=0$ разрешимость задачи сводится к разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, затем к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. На линии $x=0$ разрешимость задачи сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабым ядром. Методом функции Грина и Римана найдены представления решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, краевые условия, единственность, существование, функция Грина, функция Римана, интегральные уравнения.

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF THIRD ORDER WITH TWO LINES OF TYPE CHANGE

Sopuev Akylbek Adakhimzhanovich

Osh State University

723500, 331 Alymbek Datka Str., Osh, Kyrgyz Republic

<https://orcid.org/0009-0006-6059-0008>, sopuevv@gmail.com

Abstract. The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a third-order mixed parabolic-hyperbolic equation with two lines of change of type, $y=0$ and $x=0$, are established. On the change line of type $y=0$ and $x=0$, the unknown function and its normal derivatives are continuous. By eliminating a system of equations obtained from the parabolic and hyperbolic parts of the domains on the line $y=0$, the solvability of the problem is reduced to the solvability of a boundary value problem for an ordinary differential equation of the second order, then to the solvability of a Fredholm integral equation of the second kind. On the line $x=0$, the problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind with a weakly singular kernel. Representations of the solution to the problem under consideration are obtained using Green's and Riemann's function methods.

Keywords: differential equation, third order, multiple characteristics, boundary conditions, uniqueness, existence, Green's function, Riemann function, integral equations.

Введение

В работе [1] – [5] изучена разрешимость краевых задач для смешанного парабола-гиперболического уравнения третьего порядка с одной линией изменения типа $y = 0$:

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_{xy} = 0, & y > 0, \\ u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, & y < 0, \end{cases}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ – заданные коэффициенты.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа третьего порядка, когда в одной части

рассматриваемой области уравнение принадлежит параболическому типу, а в другой – гиперболическому типу исследованы в работах [6], [7].

Обзор прямых, обратных и некорректных задач для уравнений в частных производных приведен в работах [8], [9]. Нелокальные задачи, задачи со смещением и другие краевые задачи рассмотрены в работах [10] – [14]. Задачи с интегральными условиями рассмотрены в работах [15, 16]. Краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка, близкие к тематике данной работы, исследованы в работах [17] – [19].

В данной работе изучаются краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанного парабола-гиперболического типа с двумя линиями изменения типа $y=0$ и $x=0$.

Постановка задачи. Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$ ($r=0,1,\dots,n$; $s=0,1,\dots,m$). В области $D=D_1 \cup D_2 \cup D_3$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_{xy}, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u, & (x,y) \in D_2, \\ u_{xy} + a_3 u_x + b_3 u_y + c_3 u, & (x,y) \in D_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $D_1 = \{(x,y): 0 < x < \ell, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_1 < y < 0\}$, $D_3 = \{(x,y): -\ell_1 < x < 0, 0 < y < h\}$ ($\ell, \ell_1, h, h_1 > 0$), a_i, b_i, c_i ($i=2,3$) – заданные функции, причем

$$a_i(x,y) \in C^{1+0}(D_i), b_i(x,y) \in C^{0+1}(D_i), c_i(x,y) \in C(D_i) (i=2,3). \quad (2)$$

По классификации работы [20], уравнение (1) является уравнением смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup \cup C^{2+1}(D_2) \cup C^{2+1}(D_3)]$ ($i=\overline{1,3}$), удовлетворяющую уравнению (1) в области $D / (x \neq 0, y \neq 0)$ краевые условия

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u(0, y) = \chi_1(y), u_x(0, y) = \chi_2(y), -h_1 \leq y \leq 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), -\ell_1 \leq x \leq 0, \quad (5)$$

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_3(y), 0 \leq y \leq h \quad (6)$$

где φ_i, χ_i ($i=1,2$), $\varphi_3, \psi, \alpha, \beta, \gamma$ – заданные функции, причем

$$\varphi_i(y) \in C^1[0, h], \chi_i(y) \in C^1[-h_1, 0] (i=1,2), \varphi_3(y) \in C[0, h], \psi(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \quad (7)$$

$$\psi(0) = \chi_1(0), \psi'(0) = \chi_2(0), \varphi_3(0) = \psi(-\ell_1). \quad (8)$$

Пусть:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau_1(x), u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = v_1(x), 0 \leq x \leq \ell, \quad (9)$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_2(y), u_x(+0, y) = v_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (10)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. Требуется найти в области D_1 функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \cap C^{3+1}(D_1)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xxx} - u_{xy} = 0, (x,y) \in D_1 \quad (11)$$

и условиям

$$\begin{aligned} u_x(+0, y) = v_2(y), u(\ell, y) = \varphi_1(y), u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h, \\ u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача 3. Требуется найти в области D_2 функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u = 0, (x, y) \in D_2, \quad (13)$$

краевым условиям (4) и начальному условию

$$u(x, 0) = \tau_1(x), 0 \leq x \leq \ell. \quad (14)$$

Задача 4. Требуется найти в области D_3 функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}_3) \cap C^{2+1}(D_3)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_3(u) \equiv u_{xy} + a_3 u_x + b_3 u_y + c_3 u = 0, (x, y) \in D_3, \quad (15)$$

условию (5) и условиям

$$u(0, y) = \tau_2(y), 0 \leq y \leq h, \quad (16)$$

$$u_x(-0, y) = v_2(y), 0 \leq y \leq h. \quad (17)$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи 1 сначала требуется построить решение задач 2, 3 и 4 в каждой из областях $D_i (i = 1, 2, 3)$ (Рисунок 1).

Чтобы решить указанные вспомогательные задачи 2, 3 и 4, сначала требуется определить функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$.

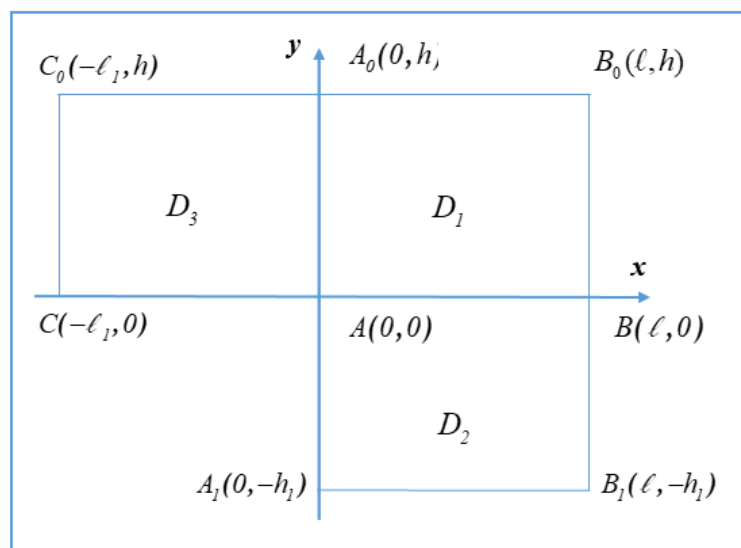


Рисунок 1. Рисунок области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

Материалы и методы

Соотношения между $\tau_1(y)$ и $v_1(y)$, полученные из областей D_1 и D_2

После интегрирования уравнения (11) по области D_1 в пределах от x до ℓ , с учетом краевых условий (3), получается уравнение

$$u_{xx} - u_y = \omega(y), (x, y) \in D_1, \quad (18)$$

где $\omega(y) = \varphi_2(y) - \varphi_1'(y)$. При переходе к пределу при $y \rightarrow +0$ из уравнения (18) получается соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = \omega(0). \quad (19)$$

С другой стороны, из уравнения (13) при $y \rightarrow -0$ имеет место соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\nu_1''(x) + a_2(x, 0)\tau_1'(x) + b_2(x, 0)\nu_1(x) + c_2(x, 0)\tau_1(x) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) записываем в виде:

$$\nu_1''(x) + b_2(x, 0)\nu_1(x) = T_1(x, \tau_1(x)), \quad (21)$$

где $T_1(x, \tau_1(x)) = -a_2(x, 0)\tau_1'(x) - c_2(x, 0)\tau_1(x)$.

Из условий (4) получаем краевые условия:

$$\nu_1(0) = \chi_1'(0), \nu_1(\ell) = \varphi_1'(0), \quad (22)$$

После введения замены

$$\nu_1(x) = z_0(x) + z(x), \quad (23)$$

где $z_0(x) = \chi_1'(0) + \frac{x}{\ell}[\varphi_1'(0) - \chi_1'(0)]$, для новой неизвестной функции $z(x)$ формулируется

новая краевая задача:

$$z''(x) + b_2(x, 0)z(x) = T(x, \tau_1(x)), \quad (24)$$

$$z(0) = 0, z(\ell) = 0, \quad (25)$$

где $T(x, \tau_1(x)) = T_1(x, \tau_1(x)) - z_0(x)b_2(x, 0)$.

Справедлива

Лемма 1. Если выполняется условие

$$\forall x \in [0, \ell] : b_2(x, 0) \leq 0, \quad (26)$$

то однородная задача (24), (25) имеет только тривиальное решение.

При выполнении условия (26), решение задачи (24), (25) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$z(x) = \int_0^\ell G_1(x, \xi)T(\xi, \tau_1(\xi))d\xi, \quad (27)$$

где $G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(x-\ell)}{\ell}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{x(\xi-\ell)}{\ell}, & x \leq \xi \leq \ell \end{cases}$ – функция Грина. Тогда из (23) и (27), получается

соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\nu_1(x) = \int_0^\ell K_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \quad (28)$$

где $K_1(x, \xi) = G_{1\xi}(x, \xi)a_2(\xi, 0) + [a_{2\xi}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)]G_1(x, \xi)$,

$$\Phi_1(x) = z_0(x) - \int_0^\ell b_2(\xi, 0)z_0(\xi)G_1(x, \xi)d\xi + a_2(0, 0)G_1(x, 0)\chi_1(0) - a_2(\ell, 0)G_1(x, \ell)\varphi_1(0).$$

После исключения $\nu_1(x)$ из (19) и (28) получаем уравнение:

$$\tau_1''(x) = \int_0^\ell K_1(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x) + \omega(0). \quad (29)$$

Используя краевые условия

$$\tau_1(0) = \chi_1(0), \tau_1(\ell) = \varphi_1(0) \quad (30)$$

из (29) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x) = \int_0^\ell K_2(x, \xi) \tau_1(\xi) d\xi + \Phi(x), \quad (31)$$

где $\Phi(x) = \chi_1(0) + \frac{x}{\ell} [\varphi_1(0) - \chi_1(0)] + \int_0^\ell G_2(x, \xi) [\Phi_1(\xi) \gamma(\xi) + \omega(0)] d\xi$,

$$K_2(x, \xi) = \int_0^\ell G_2(x, s) K_1(s, \xi) ds, \quad G_2(x, s) = \begin{cases} \frac{s(x-\ell)}{\ell}, & 0 \leq s \leq x, \\ \frac{x(s-\ell)}{\ell}, & x \leq s \leq \ell. \end{cases}$$

Лемма 2. Если

$$\ell \cdot \|K_2(x, \xi)\| < 1, \quad (32)$$

то решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (31) существует и единственно.

Таким образом, из (31) однозначно определяется функция $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) = \Phi(x) + \int_0^\ell R_1(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad (33)$$

где $R_1(x, \xi)$ – резольвента ядра $K_2(x, \xi)$.

Получение соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$ из области D_1 .

После определения $\tau_1(x)$, решение уравнения (18) в области D_1 представим в виде

$$u(x, y) = - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \\ + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y \omega(\eta) d\eta \int_0^\ell G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \quad (x, y) \in D_1, \quad (34)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина, которая представима в виде [21, стр. 59-60]:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left(-\frac{(x-\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) \right].$$

Отметим, что в формуле (34) функция $v_2(y)$ ещё не определена. При $x = +0$ из (34) получаем соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$:

$$\tau_2(y) = \int_0^y N_1(y, \eta) v_2(\eta) d\eta + \Phi_1(y), \quad (35)$$

где

$$N_1(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \left\{ -1 + \exp\left(-\frac{\ell^2}{y-\eta}\right) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right) - \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\ell^2}{y-\eta}\right) \right] \right\},$$

$$\Phi_1(y) = - \int_0^y G_\xi(0, y; \ell, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(0, y; \xi, 0) \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^y \omega(\eta) d\eta \int_0^\ell G(0, y; \xi, \eta) d\xi.$$

Получение соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$ из области D_3 . Для получения второго соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$, сначала в области D_3 построим решение задачи 4. Пусть $M_1(x, y)$ произвольная точка области D_3 , а

$w(x, y; \xi, \eta)$ – произвольное решение уравнения

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\xi\eta} - (a_3 w)_\xi - (b_3 w)_\eta + c_3 w = 0, \quad (36)$$

в области $D_3^* = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\}$ с границей $\partial D_3^* = M_1 P_1 \cup P_1 A \cup A Q_1 \cup Q_1 M_1$, где $M_1 P_1 = \{(\xi, \eta) : \xi = x, 0 < \eta < y\}$, $P_1 A = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, \eta = 0\}$, $A Q_1 = \{(\xi, \eta) : \xi = 0, 0 < \eta < y\}$, $Q_1 M_1 = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, \eta = y\}$.

Имеет место тождество:

$$w L_3(u) - u L_3^*(w) = [w u_{\xi\eta} + w_{\xi\eta} u + a_3 w u]_\xi - [w_\xi u_\xi - b_3 w u]_\eta. \quad (37)$$

После интегрирования тождество (37) по области D_3^* имеет место соотношение

$$\iint_{D_3^*} [w L_3(u) - u L_3^*(w)] d\xi d\eta = \int_{\partial D_3^*} (w_\xi u_\xi - b_3 w u) d\xi + (w u_{\xi\eta} + w_{\xi\eta} u + a_3 w u) d\eta. \quad (38)$$

Пусть $w(x, y; \xi, \eta) \in C(\bar{D}_3^*) \cap C^{2+1}(D_3^*)$ является решением уравнения (36), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} w(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} &= 0, 0 \leq \eta \leq y, \\ w_\xi(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} &= 1, 0 \leq \eta \leq y, \\ w(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} &= \sigma(x, y; \xi), x \leq \xi \leq 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\sigma(x, y; \xi)$ – определены как решение задачи Коши:

$$w_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) + b_3(\xi, y)w(x, y; \xi, y) = 0, \quad (40)$$

$$w(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, w_\xi(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1. \quad (41)$$

Методом интегрирования из уравнения (36) получаем для $w(x, y; \xi, \eta)$ интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\begin{aligned} w(x, y; \xi, \eta) &= \xi - x - \int_x^\xi (\xi - \xi_1) b_3(\xi_1, \eta) w(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \\ &+ \int_x^\xi d\xi_1 \int_\eta^y [a_3(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1) c_3(\xi_1, \eta_1)] w(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1, \end{aligned} \quad (42)$$

которое имеет единственное решение.

После интегрирования тождества (38) по области $D_3^* = \{(\xi, \eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\}$ с учетом свойств функции $w(x, y; \xi, \eta)$, определяем решение задачи 4 в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w_\xi(x, y; 0, y) \tau_2(y) + w_\xi(x, y; x, 0) \psi(x) - w(x, y; 0, y) \nu_2(y) - \\ &- w_\xi(x, y; 0, 0) \psi(0) + w(x, y; 0, 0) \nu_2(0) + \int_0^y w_\eta(x, y; 0, \eta) \nu_2(\eta) d\eta - \\ &- \int_0^y [w_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta) + a_3(0, \eta) w(x, y; 0, \eta)] \tau_2(\eta) d\eta + \\ &+ \int_x^0 [w_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w(x, y; \xi, 0)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Используя краевое условие (6), из (43), получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \varphi_3(y) = & w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, y) \tau_2(y) + w_{\xi}(-\ell_1, y; -\ell_1, 0) \psi(-\ell_1) - w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, 0) \psi(0) - \\ & - w(-\ell_1, y; 0, y) \nu_2(y) + w(-\ell_1, y; 0, 0) \nu_2(0) + \int_0^y w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) \nu_2(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y [w_{\xi\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) + a_3(0, \eta) w(-\ell_1, y; 0, \eta)] \tau_2(\eta) d\eta + \\ & + \int_{-\ell_1}^0 [w_{\xi\xi}(-\ell_1, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w(-\ell_1, y; \xi, 0)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (44)$$

Равенство (44) запишем в виде:

$$\begin{aligned} w(-\ell_1, y; 0, y) \nu_2(y) = & w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, y) \tau_2(y) + \int_0^y B_1(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \Psi_1(y) + \\ & + \int_0^y w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) \nu_2(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(y, \eta) = & -w_{\xi\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta) - a_3(0, \eta) w(-\ell_1, y; 0, \eta), \\ \Psi_1(y) = & -\varphi_3(y) + w_{\xi}(-\ell_1, y; -\ell_1, y) \psi(-\ell_1) - w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, 0) \psi(0) + w(-\ell_1, y; 0, 0) \psi'(0) + \\ & + \int_{-\ell_1}^0 [w_{\xi\xi}(-\ell_1, y; \xi, 0) + b_3(\xi, 0) w(-\ell_1, y; \xi, 0)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Лемма 3. Если

$$\forall (x, y) \in D_3 : b_3(x, y) \leq 0, \quad (46)$$

то

$$\forall y \in [0, h] : w(-\ell_1, y; 0, y) \geq \ell_1. \quad (47)$$

Доказательство. Из уравнения (42) при $x = -\ell_1$, $\eta = y$ получаем соотношение

$$w(-\ell_1, y; 0, y) = \ell_1 + \int_{-\ell_1}^0 \xi_1 b_3(\xi_1, y) w(-\ell_1, y; \xi_1, y) d\xi_1. \quad (48)$$

При выполнении условия (46) из равенства (48) вытекает, что $\forall y \in [0, h] : w(-\ell_1, y; 0, y) \geq \ell_1$. Что и требовалось доказать.

Если учесть неравенство (47), то из уравнения (45) имеем:

$$\nu_2(y) = \Psi_2(y) + A_1(y) \tau_2(y) + \int_0^y B_2(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta + \int_0^y K_3(y, \eta) \nu_2(\eta) d\eta, \quad (49)$$

$$\text{где } A_1(y) = \frac{w_{\xi}(-\ell_1, y; 0, y)}{w(-\ell_1, y; 0, y)}, B_2(y, \eta) = \frac{B_1(y, \eta)}{w(-\ell_1, y; 0, y)}, K_3(y, \eta) = \frac{w_{\eta}(-\ell_1, y; 0, \eta)}{w(-\ell_1, y; 0, y)},$$

$$\Psi_2(y) = \frac{\Psi_1(y)}{w(-\ell_1, y; 0, y)}.$$

Рассматривая уравнение (49) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\nu_2(y)$, через резольвенту $R_2(y, \eta)$ ядра $K_3(y, \eta)$ его решение представим в виде:

$$\nu_2(y) = \Psi_3(y) + A_1(y) \tau_2(y) + \int_0^y B_3(y, \eta) \tau_2(\eta) d\eta, \quad (50)$$

$$\text{где } B_3(y, \eta) = B_2(y, \eta) + A_1(\eta) R_2(y, \eta) + \int_{\eta}^y R_2(y, \eta_1) B_2(\eta_1, \eta) d\eta_1,$$

$$\Psi_3(y) = \Psi_2(y) + \int_0^y R_2(y, \eta) \Psi_2(\eta) d\eta.$$

После исключения $\tau_2(y)$ из (35) и (50) получим интегральное уравнение Вольтерра

второго рода для функции $v_2(y)$

$$v_2(y) = \int_0^y N(y, \eta) v_2(\eta) d\eta + \Phi_1(y), \quad (51)$$

где $N(y, \eta) = A_1(\eta) N_1(y, \eta) + \int_{\eta}^y N_1(y, t) B_3(t, \eta) dt$, $\Phi_3(y) = \Phi_1(y) + \int_0^y N_1(y, \eta) \Psi_3(\eta) d\eta$,

которое допускает единственное решение. Определив $v_2(y)$ из (51), последовательно находим $\tau_2(y)$ по формуле (35).

Построение решение задачи 3 в области D_2 . После определения $\tau_1(x)$ решение задачи 3 в области D_2 строится методом функции Римана. Рассмотрим функцию $v(x, y; \xi, \eta)$, которая удовлетворяет по переменным (ξ, η) уравнению:

$$L_2^*(v) \equiv -v_{\xi\xi\eta} - (a_2 v)_{\xi} - (b_2 v)_{\eta} + c_2 v = 0. \quad (52)$$

Имеет место тождество

$$v L_2(u) - u L_2^*(v) = [v u_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} u + a_2 v u]_{\xi} - [v_{\xi} u_{\xi} - b_2 v u]_{\eta}. \quad (53)$$

Пусть $M(x, y)$ произвольная точка области D_2 . Рассмотрим область $D_2^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, y < \eta < 0\}$ с границей $\partial D_2^* = AQ \cup QM \cup MP \cup PA$, где $AQ = \{(\xi, \eta) : \xi = 0, y < \eta < 0\}$, $QM = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, \eta = y\}$, $MP = \{(\xi, \eta) : \xi = x, y < \eta < 0\}$, $PA = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, \eta = 0\}$. После интегрирования тождество (53) по области D_2^* имеет место соотношение

$$\iint_{D_2^*} [v L_2(u) - u L_2^*(v)] d\xi d\eta = \int_{\partial D_2^*} (v_{\xi} u_{\xi} - b_2 v u) d\xi + (v u_{\xi\eta} + v_{\xi\eta} u + a_2 v u) d\eta. \quad (54)$$

Пусть $v(x, y; \xi, \eta) \in C(\bar{D}_2^*) \cap C^{2+1}(D_2^*)$ является решением уравнения (52), удовлетворяющая краевым условиям:

$$\begin{aligned} v(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} &= 0, \quad y \leq \eta \leq 0, \\ v_{\xi}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} &= 1, \quad y \leq \eta \leq 0, \\ v(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} &= \theta(x, y; \xi), \quad 0 \leq \xi \leq x, \end{aligned}$$

где $\theta(x, y; \xi)$ – определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) + b_2(\xi, y) v(x, y; \xi, y) &= 0, \quad 0 < \xi < x \\ v(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} &= 0, \quad v_{\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1. \end{aligned}$$

Методом интегрирования из уравнения (52) получаем интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\begin{aligned} v(x, y; \xi, \eta) &= \xi - x - \int_x^{\xi} (\xi - \xi_1) b_2(\xi_1, \eta) v(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \\ &+ \int_x^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^y [a_2(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1) c_2(\xi_1, \eta_1)] v(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1, \end{aligned}$$

которое имеет единственное решение.

Из тождество (54) с учетом свойства функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$ получаем решение уравнения (13), удовлетворяющее краевым условиям (5) и начальному условию (14), в виде:

$$\begin{aligned}
u(x, y) = & v_{\xi}(x, y; 0, y) \chi_1(y) + v_{\xi}(x, y; x, 0) \tau_1(x) - v(x, y; 0, y) \chi_2(y) - \\
& - v_{\xi}(x, y; 0, 0) \chi_1(0) + v(x, y; 0, 0) \chi_2(0) + \int_0^y v_{\eta}(x, y; 0, \eta) \chi_2(\eta) d\eta - \\
& - \int_0^y [v_{\xi\eta}(x, y; 0, \eta) + a_2(0, \eta) v(x, y; 0, \eta)] \chi_1(\eta) d\eta - \\
& - \int_0^x [v_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0) v(x, y; \xi, 0)] \tau_1(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{55}$$

Непосредственной проверкой, учитывая при этом ряд свойств функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$, нетрудно убедиться, что решение задачи 3, определенная формулой (55), удовлетворяет условиям (4) и (14).

Результаты и обсуждение

Теорема 1. Если выполняются условия (2), (7), (8), (26), (32) и (46), тогда решение задачи 1 в области D существует и единственно.

В работе Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова, И.Н. Кочиной [22] показано, что дифференциальные уравнения третьего порядка в виде (1) используется при изучении вопросы фильтрацию вязко-упругой жидкости в трещиновато-пористых средах.

В работе использован метод функции Римана, рассмотренный в работах М.Х. Шханукова [23], В.И. Жегалова и Е.А. Уткиной [24].

Полученные результаты показывают, что краевые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка вполне корректны и с двумя линиями изменения типа.

Указанный метод исследования также применим, если след искомой функции и её нормальная производная терпят разрывы первого рода на линии изменения типа уравнений.

Автор выражает благодарность докторам физико-математических наук, профессорам Ю. П. Апакову и К.Г. Кожобекову за ценные советы и предложения.

Список литературы

1. Ochilova N. K., Yuldashev T. K. On a nonlocal boundary value problem for a degenerate parabolic-hyperbolic equation with fractional derivative // Lobachevskii J Math. 2022. 43: 229–236
2. Apanov Yu. P., Sopuev A. A. Boundary Value Problems for a Mixed Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order // Lobachevskii J. Mathematics, 44:12 (2023), 5149–5157
3. Кожобеков К. Г., Сопуев А. А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с линией сопряжения // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 2(5) (2024), 75–82.
4. Апаков Ю. П., Сопуев А. А. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка // Челяб. физ.-матем. журн., 2025, том 10, выпуск 1, 5–16.
5. Апаков Ю. П., Сопуев А. А. Внутренняя нелокальная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка // Сиб. журн. индустр. матем. 28:2 (2025), 5–21
6. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа, Фан, Ташкент, 1986.
7. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного типа, Физматлит, М., 2014.

8. Сабитов К. Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболического типа, Наука, М., 2016.
9. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задач // Сибирское научное издание, Новосибирск, 2009.
10. Кожобеков К. Г. Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Вестн. КазНУ. Сер. мат., мех., инф., 2009, № 1(60), 3–40.
11. Садыбеков М. А., Дилдабек Г., Тенгаева А. А. О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного параболического типа // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатики. №1(83). 2016. – С. 55 – 66.
12. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. - 1977, т. 13, № 2. – С. 294–304.
13. Аблабеков Б., Байсеркеева А., Асылбек кызы М. (2023). Разрешимость одной нелокальной задачи для псевдопараболического уравнения // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 1(2), 6–12.
14. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, Наука, М., 2006.
15. Кожанов А. И., Тарасова Г. И. Задача Самарского – Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 42 (2022), Стр. 59–74.
16. Пулькина Л. С., Смирнова А. Н. Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2025. Том 31, № 1. С. 22–33.
17. Сопуев А., Нуранов Б. Ш. О краевых задачах для смешанного параболического уравнения третьего порядка // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. 2022. № 1, С. 16–22
18. Sopuev A., Nuranov B. SH. Boundary Value Problems for a Third Order Mixed Parabolic-hyperbolic Equation with Variable Coefficients // Lobachevskii J Math 45, 3424–3431 (2024).
19. Sopuev A., Nuranov B. SH. T. D. Dzhuraev Problem for a Mixed Parabolic-Hyperbolic Type Equation of the Third Order // Lobachevskii J Math 46, 520–527 (2025).
20. Джураев Т.Д., Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 27:10 (1991), 1734–1745.
21. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики, Физматлит, М., 2001.
22. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика, 24:5 (1960), 58–73.
23. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения, 18:4 (1982), 689–699.
24. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика, 1999, № 10, 73–76.