

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Нуранов Бактыбек Шермаматович

Ошский государственный университет,

<https://orcid.org/0009-0003-4120-8780>, nuranov2014@mail.ru

Ош, Кыргызстан

Аннотация. Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с переменными коэффициентами, когда смешанный параболическо-гиперболический оператор применяется к дифференциальному оператору первого порядка с частными производными вида $\partial/\partial x - \partial/\partial y$. На линии изменения типа уравнения требуется непрерывность следа искомой функции и её производных первого и второго порядков по y . Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача сводится к задаче Трикоми для уравнения смешанного уравнения второго порядка, разрешимость которого устанавливается методом интегральных уравнений Фредгольма второго рода. После определения следа производных первого и второго порядков искомой функции на линии изменения типа уравнений $y=0$, задача сводится к решению краевой задачи для уравнения первого порядка вида $\partial u/\partial x - \partial u/\partial y = 0$, которое имеет единственное решение.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, третий порядок, краевые условия, существование, единственность, функция Грина, функция Римана, интегральные уравнения.

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A THIRD-ORDER MIXED-TYPE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Nuranov Baktybek Shermamatovich

Osh State University,

<https://orcid.org/0009-0003-4120-8780>, nuranov2014@mail.ru

Osh, Kyrgyzstan

Abstract. The existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a third-order mixed-type equation with variable coefficients is proved when a mixed parabolic-hyperbolic operator is applied to a first-order partial differential operator of the form $\partial/\partial x - \partial/\partial y$. On the line $y=0$ where the type of the equation changes, the continuity of the trace of the unknown function and its of its first- and second-order derivatives with respect to y is required. Using the method of order reduction, the problem under consideration is reduced to the Tricomi problem for a second-order mixed-type equation, the solvability of which is established using the Fredholm integral equation method of the second kind. After determining the traces of the first- and second-order derivatives of the unknown function on the line of type change $y=0$, the problem is reduced to solving a boundary value problem for a first-order equation of the form $\partial u/\partial x - \partial u/\partial y = 0$, which has a unique solution.

Keywords: partial differential equations, third-order, boundary conditions, existence, uniqueness, Green's function, Riemann function, integral equations.

Введение

Разработка корректных условий «склеивания» решений на границе раздела областей – это фундаментальная задача теории дифференциальных уравнений, так как с ростом порядка уравнения для обеспечения гладкости решения и корректности краевых задач количество условий на линии сопряжения (склеивания) пропорционально увеличивается.

Обзор краевых задач для уравнения смешанного параболическо-гиперболического типа второго, третьего и четвертого порядков указаны в работах [1, 2], а для уравнений смешанного эллиптического-гиперболического и эллиптического-параболического типов приведены в работах [3 – 13].

Классификация и приведение к каноническому виду уравнений с частными производными третьего и четвертого порядков рассмотрены в работах [14 – 15].

Постановка задачи. В области D , ограниченной отрезками линий $AC: x+y=0$, $CB: x-y=\ell$, $BB_0: x=\ell$, $B_0A_0: y=\ell$, $B_0A: x=0$ ($\ell > 0$), рассматривается уравнение

$$L_1 L_2 u = 0 \quad (1)$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y), & y > 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y},$$

$a_2(x, y), b_2(x, y), c_i(x, y)$ ($i=1, 2$) – заданные функции, $D = D_1 \cup AB \cup D_2$, $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $AB = \{(x, y): 0 < x < \ell, y = 0\}$.

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая является решением уравнения (1) в области $D \setminus (y = 0)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x, y), u_y(x, y), u_{yy}(x, y) \in C(\bar{D}), \quad (2)$$

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), u|_{BB_0} = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq \ell, \quad (3)$$

$$u_x|_{AA_0} = \varphi_3(y), u_x|_{BB_0} = \varphi_4(y), 0 \leq y \leq \ell, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi(x), \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell, \quad (5)$$

где $\varphi_i(y)$ ($i = \overline{1, 4}$), $\psi(x)$ – заданные гладкие функции, n – внутренняя нормаль (Рис.1), причём

$$c_1(x, y) \in C(\bar{D}_1), a_2(x, y), a_{2x}(x, y), b_2(x, y), b_{2y}(x, y), c_2(x, y) \in C(\bar{D}_2). \quad (6)$$

$$\varphi_i(y) \in C^1[0, \ell] \quad (i = 1, 2), \varphi_j(y) \in C[0, \ell] \quad (j = 3, 4), \psi(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]. \quad (7)$$

$$\varphi_4(0) - \varphi_2'(0) = -\sqrt{2}\psi(\ell). \quad (7)$$

Если $y > 0$, то уравнение (1) представим в виде:

$$L_2 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v_1(x, y), (x, y) \in D_1, \quad (8)$$

$$L_1 v_1 \equiv \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1}{\partial y} + c_1(x, y)v_1 = 0, (x, y) \in D_1, \quad (9)$$

а когда $y < 0$, то уравнение (1) запишем в виде

$$L_2 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v_2(x, y), (x, y) \in D_2, \quad (10)$$

$$L_1 v_2 \equiv \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + a_2(x, y) \frac{\partial v_2}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial v_2}{\partial y} + c_2(x, y)v_2 = 0, (x, y) \in D_2. \quad (11)$$

Из постановки задачи 1 вытекает, что на линии $y=0$ выполняются следующие условия склеивания:

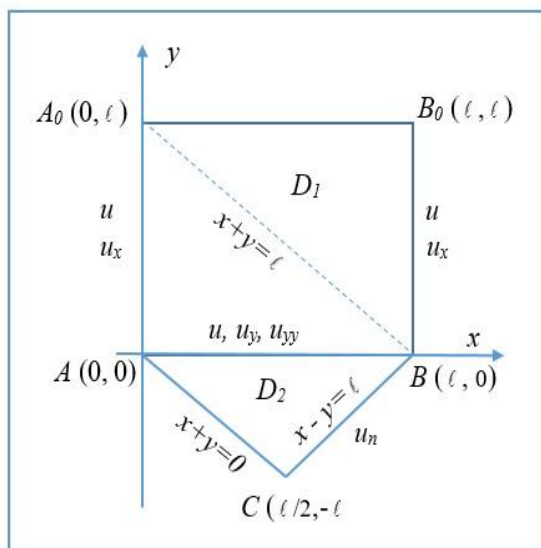


Рис. 1. Рисунок областей D

$$v_1(x, +0) = v_2(x, -0), v_{1y}(x, +0) = v_{2y}(x, -0), 0 \leq x \leq l. \quad (12)$$

Пусть

$$v_1(x, +0) = v_2(x, -0) = v(x), 0 \leq x \leq l, \quad (13)$$

$$v_{1y}(x, +0) = v_{2y}(x, -0) = \mu(x), 0 \leq x \leq l, \quad (14)$$

где $v(x)$ и $\mu(x)$ – новые неизвестные функции, подлежащие определению.

Материалы и методы исследования

Связь между функциями $v(x)$ и $\mu(x)$, полученная из области D_2 . Решение уравнения (11) в области D_2 , удовлетворяющее условиям (13), (14), запишем в следующем виде [16]:

$$v_2(x, y) = \frac{1}{2} \left[R(x, y; x+y, 0) v(x+y) + R(x, y; x-y, 0) v(x-y) \right] + \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} \left[R_\eta(x, y; \xi, 0) + b_2(\xi, 0) R(x, y; \xi, 0) \right] v(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} R(x, y; \xi, 0) \mu(\xi) d\xi, \quad (15)$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ – функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса для уравнения

$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (a_2 R)_\xi - (b_2 R)_\eta + c_2 R = 0, \quad (16)$$

удовлетворяющее условиям

$$R(x, y; \xi, x+y-\xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^\xi [a_2(t, x+y-t) + b_2(t, x+y-t)] dt \right\}, \quad (17)$$

$$R(x, y; \xi, \xi-x+y) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^\xi [a_2(t, t-x+y) - b_2(t, t-x+y)] dt \right\}, \quad (18)$$

$$R(x, y; x, y) = 1. \quad (19)$$

Условие (5) запишем в следующем виде:

$$\nu_2(x, x-\ell) = -\sqrt{2}\psi(x), \quad \ell/2 \leq x \leq \ell. \quad (20)$$

Используя условия (20), при $y = x - \ell$ из формулы (15), получим связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(x, x-\ell; 2x-\ell, 0)\nu(2x-\ell) = & - \int_{2x-\ell}^{\ell} \left[R_{\eta}(x, x-\ell; \xi, 0) + b_2(\xi, 0)R(x, x-\ell; \xi, 0) \right] \nu(\xi) d\xi + \\ & + \int_{2x-\ell}^{\ell} R(x, x-\ell; \xi, 0) \mu(\xi) d\xi - 2\sqrt{2}\psi(x) + \sqrt{2}R(x, x-\ell; \ell, 0)\psi(\ell). \end{aligned} \quad (21)$$

Введя замену $2x-\ell = z$, затем меняя z на x , имеем

$$\begin{aligned} R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)\nu(x) = & - \int_x^{\ell} \left[R_{\eta}\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) + b_2(\xi, 0)R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) \right] \nu(\xi) d\xi + \\ & + \int_x^{\ell} R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) \mu(\xi) d\xi - 2\sqrt{2}\psi\left(\frac{x+\ell}{2}\right) + \sqrt{2}R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \ell, 0\right)\psi(\ell). \end{aligned} \quad (22)$$

Лемма 1. $\forall x \in [0, \ell]$ имеет место неравенство

$$R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right) > 0. \quad (23)$$

Доказательство. Из равенства (17) при $\xi = x + y$ имеем

$$R(x, y; x+y, 0) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{x+y} [a_2(t, x+y-t) + b_2(t, x+y-t)] dt \right\}.$$

Отсюда при $y = x - \ell$ имеем

$$R(x, x-\ell; 2x-\ell, 0) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{2x-\ell} [a_2(t, 2x-\ell-t) - b_2(t, 2x-\ell-t)] dt \right\}.$$

Введя замену $2x-\ell = z$, затем меняя z на x , получим

$$R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{x+\ell}{2}}^x [a_2(t, x-t) - b_2(t, x-t)] dt \right\}, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Следовательно, $\forall x \in [0, \ell]: R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right) > 0$. Лемма 1 доказано.

С учетом Леммы 1 из (22) имеем

$$\nu(x) = \int_x^{\ell} K_1(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \int_x^{\ell} K_2(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Psi_1(x), \quad (24)$$

где $K_1(x, \xi) = - \frac{R_{\eta}\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right) + b_2(\xi, 0)R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)},$

$$K_2(x, \xi) = \frac{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \xi, 0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)}, \quad \Psi_1(x) = -\sqrt{2} \frac{2\psi\left(\frac{x+\ell}{2}\right) - R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; \ell, 0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2}, \frac{x-\ell}{2}; x, 0\right)},$$

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (24), имеем соотношение между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$, полученное из области D_2 :

$$\nu(x) = \int_x^\ell K_3(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Psi_2(x), \quad (25)$$

где $K_3(x, \xi) = K_2(x, \xi) + \int_x^\xi R_1(x, t) K_2(t, \xi) dt$, $\Psi_2(x) = \Psi_1(x) + \int_x^\xi R_1(x, \xi) \Psi_1(\xi) d\xi$, $R_1(x, \xi)$ - резольвента ядра $K_1(x, \xi)$.

Связь между функциями $\nu(x)$ и $\mu(x)$, полученная из области D_1 . С учетом условий склеивания (12) – (14) и переходом к пределу при U стремящемся к нулю, из уравнения (9) получим следующее соотношение:

$$\nu''(x) = \mu(x) - c_1(x, 0)\nu(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (26)$$

Из краевых условий (2) и (3) получим:

$$\nu(0) = \varphi_3(0) - \varphi'_1(0), \quad \nu(\ell) = \varphi_4(0) - \varphi'_2(0). \quad (27)$$

Для получения однородных краевых условий, вводим новую функцию $\tilde{\nu}(x)$, определенную равенством:

$$\nu(x) = \varphi(x) + \tilde{\nu}(x) \quad (28)$$

где

$$\varphi(x) = \varphi_3(0) - \varphi'_1(0) + \frac{x}{\ell} [\varphi_4(0) - \varphi'_2(0) - \varphi_3(0) + \varphi'_1(0)].$$

Тогда для функции $\tilde{\mu}(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \tilde{\nu}''(x) = \mu(x) - c_1\nu(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ \tilde{\nu}(0) = 0, \quad \tilde{\nu}(\ell) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Решение задачи (29) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{\nu}(x) = \int_0^\ell G(x, \xi) [\mu(\xi) - c_1\nu(\xi)] d\xi, \quad (30)$$

$$\text{где } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(x-\ell)}{\ell}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{x(\xi-\ell)}{\ell}, & x \leq \xi \leq \ell \end{cases} \quad \text{функция Грина.}$$

Отметим, что $G(0, \xi) = 0$, $G(\ell, \xi) = 0$, $G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) = -1$.

Исключая $\tilde{\nu}(x)$ из (28) и (30), получим следующее соотношение:

$$\nu(x) = -c_1 \int_0^\ell G(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \int_0^\ell G(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (31)$$

Обращая уравнение (31) относительно $\nu(x)$, имеем:

$$v(x) = \Phi_1(x) + \int_0^{\ell} K_4(x, \xi) \mu(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (32)$$

где $K_4(x, \xi) = G(x, \xi) + \int_0^{\ell} R_2(x, s) G(s, \xi) ds$, $\Phi(x) = \varphi(x) + \int_0^{\ell} R_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$,

а $R_2(x, \xi)$ резольвента ядра $-c_1 G(x, \xi)$.

Приведение задачи к интегральному уравнению. Исключив $v(x)$ из уравнений (25) и (32), получим:

$$\int_x^{\ell} K_3(x, \xi) \mu(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} K_4(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Phi_2(x), \quad (33)$$

где $\Phi_2(x) = \Phi_1(x) - \Psi_2(x)$.

Дифференцируя уравнение (33), придем к следующему уравнению:

$$-K_3(x, x) \mu(x) + \int_x^{\ell} K_{3x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} K_{4x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \Phi_2'(x). \quad (34)$$

Если учесть, что $\forall x \in [0, \ell]: K_3(x, x) = K_2(x, x) = 1$, то уравнение (34) можно записать в следующем виде:

$$\mu(x) = \int_x^{\ell} K_{2x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi - \int_0^{\ell} K_{4x}(x, \xi) \mu(\xi) d\xi - \Phi_2'(x). \quad (35)$$

После нахождения обращения Вольтерровской части уравнения (35), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\mu(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} K(x, \xi) \mu(\xi) d\xi, \quad (36)$$

где

$$K(x, \xi) = -K_{4x}(x, \xi) - \int_x^{\ell} R_3(x, \xi_1) K_{4x}(\xi_1, \xi) d\xi_1, \quad \Phi(x) = -\Phi_2'(x) - \int_x^{\ell} R_2(x, \xi_1) \Phi_2'(\xi_1) d\xi_1,$$

а $R_3(x, \xi)$ – резольвента ядра $K_{4x}(x, \xi)$.

Пусть $\|K\|_{C(\bar{Q})} = \max_{(x, \xi) \in \bar{Q}} |K(x, \xi)|$, где $Q = \{(x, \xi): 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq \xi \leq \ell\}$.

Если

$$\ell \cdot \|K\|_{C(\bar{Q})} < 1, \quad (37)$$

тогда интегральное уравнение (36) имеет единственное решение.

Решение уравнения (36) определим в виде

$$\mu(x) = \Phi(x) + \int_0^{\ell} N(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi,$$

где $N(x, \xi)$ – резольвента ядра $K(x, \xi)$. Тогда из (32) находим $v(x)$. Следовательно, функция $v_2(x, y)$, представленная по формуле (15), полностью определена.

Решение задачи в области D_1 . В области D_1 решение уравнения (9), удовлетворяющее граничные условия:

$$u_1(0, y) = \varphi_3(y) - \varphi_1'(y) = \tilde{\varphi}_1(y), \quad u_1(\ell, y) = \varphi_4(y) - \varphi_2'(y) = \tilde{\varphi}_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u_1(x, 0) = v(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

определим с помощью функции Грина:

$$u_1(x, y) = f(x, y) + \int_0^y d\eta \int_0^\ell c_1(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) u_1(\xi, \eta) d\xi, \quad (38)$$

где

$$f(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \tilde{\varphi}_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y; \ell, \eta) \tilde{\varphi}_2(\eta) d\eta + \int_0^\ell G(x, y; \xi, 0) v(\xi) d\xi,$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} -$$

функция Грина. Решение уравнения (38) определяется методом последовательных приближений. Таким образом, функция $u_1(x, y)$ однозначно определена.

В области D_1 решение задачи 1 сводится к решению следующей задачи.

Задача 2. Найти в области D_1 решение уравнения (8), удовлетворяющее условию (3).

Для решения задачи 2 поступим следующим образом. Область $D_1 = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, 0 < \eta < \ell\}$ разобьём на две части: $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, где $D_{11} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, 0 < \eta < \ell - \xi\}$, $D_{12} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, \ell - \xi < \eta < \ell\}$ (Рис. 2).

В области D_{11} выберем произвольную точку $M_1(x, y)$. Через точку $N_1(0, x+y)$ проведём прямую $N_1M_1 : \eta = -\xi + x + y$. Теперь рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int_{N_1M_1} [u_\xi(\xi, \eta) - u_\eta(\xi, \eta)] d\xi = \int_{N_1M_1} v_1(\xi, \eta) d\xi.$$

В развернутом виде это равенство имеет вид:

$$\int_0^x [u_\xi(\xi, -\xi + x + y) - u_\eta(\xi, -\xi + x + y)] d\xi = \int_0^x v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi.$$

Учитывая, что $u_\xi(\xi, -\xi + x + y) - u_\eta(\xi, -\xi + x + y) = \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, -\xi + x + y)$ и первое краевое условие (3), из предыдущего равенства имеем

$$u(x, y) = \varphi_1(x + y) + \int_0^x v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi, \quad 0 \leq y \leq \ell - x.$$

Аналогичным образом в области $D_{12} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \ell, \ell - \xi < \eta < \ell\}$, выберем произвольную точку $M_2(x, y)$. Через точку $N_2(\ell, x + y - \ell)$ проведём прямую $M_2N_2 : \eta = -\xi + x + y$ и рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int_x^\ell [u_\xi(\xi, -\xi + x + y) - u_\eta(\xi, -\xi + x + y)] d\xi = \int_x^\ell v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi.$$

Отсюда получим решение задачи 2, удовлетворяющее второе краевое условие (3) в следующем виде:

$$u(x, y) = \varphi_2(x + y - \ell) - \int_x^\ell v_1(\xi, -\xi + x + y) d\xi, \quad \ell - x \leq y \leq \ell.$$

Таким образом, решение задачи 2 представим в виде:

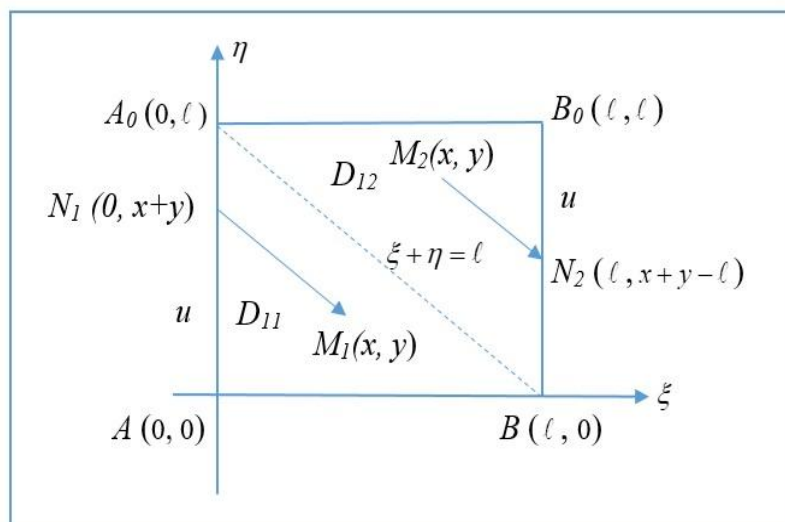


Рис. 2. Рисунок областей D_{11} и D_{12}

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x+y) + \int_0^x \nu_1(\xi, -\xi + x+y) d\xi, & 0 \leq y \leq \ell - x, \\ \varphi_2(x+y-\ell) - \int_x^\ell \nu_1(\xi, -\xi + x+y) d\xi, & \ell - x \leq y \leq \ell, \end{cases} \quad (39)$$

где $\nu_1(x, y)$ определена по формуле (38). Отметим, что решение задачи 2 в области D_1 может иметь разрыв первого рода на линии $y = \ell - x$. Если потребуем выполнение условия согласования:

$$\varphi_2(0) = \varphi_1(\ell) + \int_0^\ell \nu_1(\xi, \ell - \xi) d\xi, \quad (40)$$

то $\nu_1(x, y) \in C(D_1)$.

Решение задачи в области D_2 . Из формулы (39) непосредственно можно определить след функции в следующем виде:

$$\tau(x) = u(x, 0) = \varphi_1(x) + \int_0^x \nu_1(\xi, -\xi + x) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (41)$$

Тогда решение задачи 1 в области D_2 , удовлетворяющее уравнение (9) и краевое условие (41), определяется по формуле:

$$u(x, y) = \tau(x+y) + \int_{x+y}^x \nu_2(\xi, -\xi + x+y) d\xi, \quad (x, y) \in D_2.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (6), (7), (37) и (40). Тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Литературы

1. Джурев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. - 448 с.
4. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.
5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. - 287 с.
6. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1982.
7. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.
8. Бобылева Л.А., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. – 1972, №5. – С. 15-21.
9. Смирнов М.М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. №9. – С. 1678-1686.
10. Жегалов В.И. Некоторые задачи для уравнения смешанного-составного типа в бесконечной области // Труды семинара по краевым задачам. 1972. Вып. 9. – С. 75-85.
11. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество. – 2001. – 226 с.
12. Апаков Ю.П., Хамитов А.А.У. О разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №1(2). С. 13-23.
13. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №1(2). С. 194-196.
14. Юлдашев Т.К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017. Выпуск 1(38). 42–54.
15. Юлдашев Т.К., Артыкова Ж.А. Об одной однородной нелокальной задаче для интегро-дифференциального уравнения фредгольма второго порядка // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №1(2). С. 239-249.
16. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с несимметричными условиями по времени // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника. – 2023, №2(3). С. 15-25.
17. Apakov Yu. P., Sopuev A.A. Boundary Value Problems for a Mixed Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 12, pp. 5149–5157.
18. Yuldashev T. K., Apakov Yu. P. and Zhuraev A. Kh. Boundary value problem for third order partial integrodifferential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, 42, 1317–1327.
19. Джураев Т.Д. Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка Дифференциальные уравнения.

- 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734-1745.
20. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
21. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
22. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
23. Абдумиталип Уулу, К. Төртүнчү тартиптеги кылдын термелүү операторун кармаган аралаш параболо-гиперболикалык тендеме үчүн чек аралык маселе / К. Абдумиталип Уулу // Вестник Ошского государственного университета. - 2021. - Vol. 3, No. 1. - P. 10-18. - DOI 10.52754/16947452_2021_3_1_10. - EDN HNHQFZ.
24. Абдумиталип Уулу, К. Краевая задача для уравнения четвертого порядка параболического типа / К. Абдумиталип Уулу, Т. Д. Асылбеков // Вестник Ошского государственного университета. - 2022. - № 1. - С. 12-19. - DOI 10.52754/16947452_2022_1_12. - EDN KDEDUQ.