

УДК 514.7

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645\\_2025\\_2\(7\)\\_27](https://doi.org/10.52754/16948645_2025_2(7)_27)

## ОБ ОДНОЙ КВАЗИДВОЙНОЙ ЛИНИИ ПАРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $E_5$

**Матиева Гулбадан**

д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и геометрии,  
Ошский государственный университет;  
ORCID: 0009-0003-1106-8211, [gulbadan\\_57@mail.ru](mailto:gulbadan_57@mail.ru)

**Сарыгулова Нуркыз Акболушовна**

магистр математики, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии,  
Ошский государственный университет;  
ORCID: 0009-0009-1169-1832, [n.sarygulova@mail.ru](mailto:n.sarygulova@mail.ru)

**Махаматсабыр кызы Максуда**

магистрант, Ошский государственный университет;  
[mahamatsabyrkyzymaksuda@gmail.com](mailto:mahamatsabyrkyzymaksuda@gmail.com)

***Аннотация.** В работе рассматривается семейство гладких линий в области пятимерного евклидова пространства, обладающее свойством, что через каждую точку области проходит единственная линия данного семейства. Для исследования геометрических свойств линий используется подвижной репер Френе, а интегральные линии его координатных векторов образуют сеть Френе. На касательной к рассматриваемой линии инвариантным образом определяется точка, называемая псевдофокусом. При перемещении исходной точки в области эта точка описывает некоторую область, что приводит к возникновению частичного отображения между областями пространства. Исследуются пары четырехмерных распределений и устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых линии, принадлежащие этим распределениям, являются квазидвойными линиями соответствующих пар распределений.*

***Ключевые слова:** евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, квазидвойная линия, распределение, псевдофокус.*

## ON A QUASI-DOUBLE LINE OF A PAIR OF DISTRIBUTIONS IN THE FIVE- DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE $E_5$

**Matieva Gulbadan**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor of the Department of Algebra and Geometry,  
Osh State University;  
ORCID: 0009-0003-1106-8211, [gulbadan\\_57@mail.ru](mailto:gulbadan_57@mail.ru)

**Sarygulova Nurkyz Akbolushovna**

Master of Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Algebra and Geometry,  
Osh State University;  
ORCID: 0009-0009-1169-1832, [n.sarygulova@mail.ru](mailto:n.sarygulova@mail.ru)

**Mahamatsabyr kyzy Maksuda**

Master's Degree Student in Mathematics, Osh State University;  
[mahamatsabyrkyzymaksuda@gmail.com](mailto:mahamatsabyrkyzymaksuda@gmail.com)

***Abstract.** This paper investigates a family of smooth lines in a domain of five-dimensional Euclidean space, such that exactly one line of the family passes through each point of the domain. To study*

the geometric properties of these lines, a Frenet frame is introduced, and the integral curves of its coordinate vector fields form a Frenet net. Along the tangent to the line, a point called the pseudofocus is defined in an invariant manner. As the initial point varies within the domain, the pseudofocus traces out another domain, giving rise to a partial mapping between the corresponding domains. Pairs of four-dimensional distributions are studied, and necessary and sufficient conditions are established under which the lines belonging to these distributions are quasi-double lines.

**Key words:** Euclidean space, Frenet's frame, Frenet net, partial mapping, quasi-double lines, distribution, pseudofocus.

## ВВЕДЕНИЕ

В области  $\Omega \subset E_5$  задано семейство гладких линий так, что через каждую точку  $X \in \Omega$  проходит одна линия  $\omega^1$  заданного семейства. Подвижной репер  $\mathcal{R}$  пространства  $E_5$  выбран так, чтобы он являлся репером Френе [1] для линии  $\omega^1$ . Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии  $\omega^1$  инвариантным образом определяется точка  $F_1^2$ , так называемая псевдофокусом [2]. Когда точка  $X$  смещается в области  $\Omega$ , точка  $F_1^2$  описывает свою область  $\Omega_1^2 \subset E_5$ . Получается частичное отображение  $f_1^2: \Omega \rightarrow \Omega_1^2$  такое, что  $f_1^2(X) = F_1^2$ . Рассмотрены пары четырехмерных распределений. Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии, принадлежащие распределениям, являлись квазидвойными линиями пар распределений.

В области  $\Omega$  пространства  $E_5$  заданы семейства линий таких, что через каждую точку  $X \in \Omega$  проходит одна и только одна линия каждого семейства. Подвижной ортонормированный репер  $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = \overline{1,5})$  в области  $\Omega$  выбран так, чтобы он был репером Френе [5] для линии  $\omega^1$  заданного семейства. Девивационные формулы репера  $\mathcal{R}$  имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы  $\omega^i, \omega_i^k$  удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей  $\vec{e}_i$  образуют сеть Френе  $\Sigma_5$  для линии  $\omega^1$  заданного семейства. Поскольку репер  $\mathcal{R}$  построен на касательных к линиям сети  $\Sigma_5$ , формы  $\omega_i^k$  становятся главными [6], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (2.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [8] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l) \omega^m \quad (5)$$

отсюда

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l. \quad (6)$$

Система величин  $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$  образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии  $\omega^1$  заданного семейства имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} d_1 \vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2, \\ d_1 \vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3, \\ d_1 \vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4, \\ d_1 \vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5, \\ d_1 \vec{e}_5 &= \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4. \end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{i1}^1 = 0 \quad (i < j, i = 1, 2, 3; j = 1, 4, 5)$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} = 0 \quad (i < j, i = 1, 2, 3)$$

Здесь  $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$ ,  $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$ ,  $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ , ...,  $k_4^1 = \Lambda_{4,1}^5$  первая, вторая, третья, четвёртая кривизны линии  $\omega^1$  соответственно, где  $d_1$  – символ дифференцирования вдоль линии  $\omega^1$ .

Псевдофокус [9]  $F_i^j$  ( $i \neq j$ ) касательной к линии  $\omega^1$  сети  $\Sigma_5$  определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i} \vec{e}_i.$$

В каждой касательной  $(X, \vec{e}_i)$  существует по 4 псевдофокуса: когда точка  $X$  смещается в области  $\Omega \subset E_5$ , псевдофокус  $F_i^j$  описывает свою область  $\Omega_i^j \subset E_5$ . В результате которого получается частичное отображение  $f_i^j: \Omega \rightarrow \Omega_i^j$  такое, что  $f_i^j(X) = F_i^j$ .

### МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Псевдофокус  $F_1^2 \in (X, \vec{e}_1)$  определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_1 \quad (7)$$

Дифференцируем это равенство обычным образом и принимаем деривационные формулы репера  $\mathcal{R}$ . Тогда имеем:

$$d\vec{F}_1^2 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{12i}^2 \omega^i}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1i}^m \omega^i}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m, \text{ где } B_{12i}^2 = \Lambda_{12i}^2 + \Lambda_{1l}^2 \Lambda_{2i}^l + \Lambda_{l2}^2 \Lambda_{1i}^l$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1^2 = & \left[ \vec{e}_1 + \frac{B_{121}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^1 + \left[ \vec{e}_2 + \frac{B_{122}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^2 \\ & + \left[ \vec{e}_3 + \frac{B_{123}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^3 + \left[ \vec{e}_4 + \frac{B_{124}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^4 \\ & + \left[ \vec{e}_5 + \frac{B_{125}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^m}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_m \right] \omega^5 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \left[ 1 + \frac{B_{121}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \right] \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_5 \\ \vec{b}_2 &= \frac{B_{122}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_5; \\ \vec{b}_3 &= \frac{B_{123}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \\ \vec{b}_4 &= \frac{B_{124}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{14}^5}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_5; \\ \vec{b}_5 &= \frac{B_{125}^2}{(\Lambda_{12}^2)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^2}{\Lambda_{12}^2} \vec{e}_2 + \vec{e}_5. \end{aligned} \quad (8)$$

В общем случае векторы  $\vec{b}_i$  линейно независимые.

Присоединим к области  $\Omega_1^2 \subset E_5$  подвижный репер  $\mathcal{R}' = (F_1^2, \vec{b}_i)$ , где  $F_1^2 = f_1^2(X)$ ,  $\vec{b}_i = f_1^2(\vec{e}_i)$ .

Рассмотрим четырехмерные распределения  $\Delta_{(1234)}, \Delta_{(1235)}, \Delta_{(1234)}, \Delta_{(2345)}, \Delta_{(1245)}$  ( $\Delta_{(ijkl)} = (X, \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_l)$ ) и их образы в частичном отображении  $f_1^2: \Delta'_{(ijkl)} = f_1^2$

**Определение.** Линии  $l \in \Delta_p, \bar{l} = f(l)$  называются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_p, \Delta'_p)$  в частичном отображении  $f$ , если касательные к линиям  $l$  и  $\bar{l}$  взятые в их соответствующих точках  $X$  и  $f(X)=F$  принадлежат одному и тому же  $p$ -мерному подпространству  $\Delta_p$  пространства  $E_5$  [10].

Рассмотрим линию  $\alpha \in \Delta_{(1234)}$  с касательным вектором:  $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^2 \vec{e}_2 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4$ . Найдем касательный вектор  $\vec{\alpha}$  к линии  $\bar{\alpha} = f_1^2(\alpha)$  в виде:  $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{b}_1 + \alpha^2 \vec{b}_2 + \alpha^3 \vec{b}_3 + \alpha^4 \vec{b}_4$ . Учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = & (\alpha^1 b_1^1 + \alpha^2 b_2^1 + \alpha^3 b_3^1 + \alpha^4 b_4^1) \vec{e}_1 + (\alpha^3 b_3^2 + \alpha^4 b_4^2) \vec{e}_2 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 + (\alpha^1 b_1^5 + \alpha^2 b_2^5 \\ & + \alpha^4 b_4^5) \vec{e}_5 \end{aligned}$$

Из условия  $l, \bar{l} \in \Delta_{(1234)}$  следует, что  $\alpha^1 b_1^5 + \alpha^2 b_2^5 + \alpha^4 b_4^5 = 0$ . Воспользуюсь формулами (8) отсюда получим:

$$\alpha^1 \Lambda_{11}^5 + \alpha^2 \Lambda_{12}^5 + \alpha^4 \Lambda_{14}^5 = 0 \quad (9)$$

Обратно, если имеет место равенство (9), то линии  $\alpha, \bar{\alpha} = f_1^2(\alpha)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1234)}, \Delta'_{(1234)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ .

Легко проверить, что

А) линии  $\beta \in (\Delta_{(1235)})$  и  $\bar{\beta} = f_1^2(\beta)$  всегда являются квазидвойными линиями пара распределений  $(\Delta_{(1235)}, \Delta'_{(1235)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ ;

Б) линии  $l \in (\Delta_{(1245)})$  и  $\bar{l} = f_1^2(l)$  всегда являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1245)}, \Delta'_{(1245)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ .

Рассмотрим линию  $\gamma \in \Delta_{(2345)}$  с касательным вектором:  $\vec{\gamma} = \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 + \alpha^5 \vec{e}_5$ . Найдем касательный вектор  $\vec{\bar{\gamma}}$  к линии  $\bar{\gamma} = f_1^2(\gamma)$  в виде:  $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2 \vec{b}_2 + \gamma^3 \vec{b}_3 + \gamma^4 \vec{b}_4 + \gamma^5 \vec{b}_5$ . Учитывая формул (8) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1) \vec{e}_1 + (\gamma^3 b_3^2 + \gamma^4 b_4^2 + \gamma^5 b_5^2) \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \gamma^4 \vec{e}_4 + (\gamma^2 b_2^5 + \alpha^4 b_4^5 + \gamma^5) \vec{e}_5$$

Из условия  $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}} \in (\Delta_{(2345)})$  следует:

$$\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1 = 0.$$

Опять учитывая формул (2) отсюда имеем:

$$\gamma^2 B_{122}^2 + \gamma^3 B_{123}^2 + \gamma^4 B_{124}^2 + \gamma^5 B_{125}^2 = 0 \quad (10)$$

Обратно, если имеет место равенство (10), то линии

$\gamma \in \Delta_{(2345)}, \bar{\gamma} = f_1^2(\gamma)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(2345)}, \Delta'_{(2345)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ .

Теперь рассмотрим линию  $d \in \Delta_{(1345)}$  с касательным вектором:  $\vec{d} = d^1 \vec{e}_1 + d^3 \vec{e}_3 + d^4 \vec{e}_4 + d^5 \vec{e}_5$ . Ищем касательный вектор  $\vec{\bar{d}}$  к линии  $\bar{d} = f_1^2(d)$  в виде:  $\vec{\bar{d}} = d^1 \vec{b}_1 + d^3 \vec{b}_3 + d^4 \vec{b}_4 + d^5 \vec{b}_5$ . Учитывая формул (8) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{d}} = (d^1 b_1^1 + d^3 b_3^1 + d^4 b_4^1 + d^5 b_5^1) \vec{e}_1 + (d^3 b_3^2 + d^4 b_4^2 + d^5 b_5^2) \vec{e}_2 + d^3 \vec{e}_3 + d^4 \vec{e}_4 + (d^1 b_1^5 + d^4 b_4^5 + d^5) \vec{e}_5$$

Из условия  $\vec{d}, \vec{\bar{d}} \in (\Delta_{(1345)})$  следует:

$$d^3 b_3^2 + d^4 b_4^2 + d^5 b_5^2 = 0.$$

Опять учитывая формул (8) отсюда получим:

$$d^3 \Lambda_{13}^2 + d^4 \Lambda_{14}^2 + d^5 \Lambda_{15}^2 = 0 \quad (11)$$

Обратно, если имеет место равенство (11), то линии

$d \in \Delta_{(1345)}, \bar{d} = f_1^2(d)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1345)}, \Delta'_{(1345)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ .

Из вышеизложенных следует

**Теорема. 1)** Линии  $\alpha \in \Delta_{(1234)}$  и  $\bar{\alpha} = f_1^2(\alpha)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1234)}, \Delta'_{(1234)})$  в частичном отображении  $f_1^2$  тогда и только тогда, когда координаты касательного вектора  $\vec{\alpha}$  к линии  $\alpha$  удовлетворяет условию:

$$\alpha^1 \Lambda_{11}^5 + \alpha^2 \Lambda_{12}^5 + \alpha^4 \Lambda_{14}^5 = 0 \quad (12)$$

2) Линии  $\beta \in \Delta_{(1235)}$  и  $\bar{\beta} = f_1^2(\beta)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1235)}, \Delta'_{(1235)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ ;

3) Линии  $\gamma \in \Delta_{(1234)}$  и  $\bar{\gamma} = f_1^2(\gamma)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1234)}, \Delta'_{(1234)})$  в частичном отображении  $f_1^2$  тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\gamma^2 B_{122}^2 + \gamma^3 B_{123}^2 + \gamma^4 B_{124}^2 + \gamma^5 B_{125}^2 = 0 \quad (13)$$

4) Линии  $l \in \Delta_{(1245)}$  и  $\bar{l} = f_1^2(l)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1245)}, \Delta'_{(1245)})$  в частичном отображении  $f_1^2$ ;

5) Линии  $d \in \Delta_{(1345)}$  и  $\bar{d} = f_1^2(d)$  являются квазидвойными линиями пары распределений  $(\Delta_{(1345)}, \Delta'_{(1345)})$  в частичном отображении  $f_1^2$  тогда и только тогда, когда имеет место

равенство:

$$d^3\Lambda_{13}^2 + d^4\Lambda_{14}^2 + d^5\Lambda_{15}^2 = 0 \quad (14)$$

### Литература

1. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. Москва: Едиториал УРССР, 2002. – 664 с.
2. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*. М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 432 с.
3. Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Папиева Т.М. *Введение в геометрию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств*. Монография. – Ош: «Билим» ОшГУ, 2024. – 172 с.
4. Matieva G., Abdullaeva Ch. H., Artykova Z. A. *Existence of quasidouble lines of a pair  $(f_1^5, \Delta_{135})$  in Euclidean space*. Journal of Physics: Conference Series. 28, Sains Matematik Wahana Pencetus Inovasi Sejagat. -2001. – С. 012082. – DOI 10.1088/1742-6596/1/012082
5. Соловьев, А. Ф. *Кривизна распределения* [Текст] / А. Ф. Соловьев // Математические заметки. – Т.35. – №1. – 1984. –С. 111-124.
6. Базылев, В. Т. *О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей* [Текст] / В. Т. Базылев // Изв. вузов. Математика. – 1967. – Т. 9. – С. 3-11.
7. Папиева, Т. М. *Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе* [Текст] / Т. М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 43. – С. 199-203.
8. Шинкунас, Ю. И. *О распределении  $m$ -мерных плоскостей в  $n$ -мерном римановом пространстве* [Текст] / Ю. И. Шинкунас // Труды Геометрического Семинара. – Москва: ВИНТИ, 1973. – Т.5. – С.123-133.
9. Базылев, В. Т. *Об одном аддитивном представлении тензора Риччи  $p$ -поверхности евклидова пространства* [Текст] / В. Т. Базылев //Сибирский математический журнал. – 1966. – Т. 3. – С. 499-511.
10. Курбанбаева Н.Н., Сейитказыева Г.И., Сарыгулова Н.А. *Бөлүштүрүүлөрдүн түгөйүнүн квазикошмок сызыктарынын жашашы* [Текст] // Вестник Ошского государственного университета. Математика. – 2024. - №4/2024. – С.145-149.