

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

Камбарова Айсалкын Даминовна

к.ф.-м.н., доцент. Ошский государственный университет

ORCID 0009-0004-7885-3932, akambarova@oshsu.kg

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна

к.-ф.м.н., доцент. Ошский государственный университет

0000-0003-0694-6633, amurzabaeva@oshsu.kg

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна

к.ф.-м.н., доцент. Ошский технологический университет

0000-0002-8847-5478, jypar75@mail.ru

Аннотация. Рассматривается один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, заданных на всей числовой оси. Исследованы свойства интегрального оператора, определяемого заданным ядром, и анализируются функциональные пространства, в которых рассматриваются решения уравнения. Особое внимание уделяется условиям на ядро интегрального уравнения, обеспечивающим корректность постановки задачи и возможность восстановления неизвестной функции. Рассмотрены особенности уравнений, заданных на всей числовой оси, что приводит к дополнительным трудностям, связанным с неограниченностью области интегрирования и поведением функций на бесконечности. Для исследования используются методы функционального анализа, теории интегральных операторов и теории некорректно поставленных задач. Обсуждены возможные подходы к регуляризации решений, позволяющие стабилизировать процесс их нахождения при наличии погрешностей в исходных данных. Построены регуляризующие операторы по М.М. Лаврентьеву, для решения данного интегрального уравнения первого рода. Полученные результаты могут быть использованы в прикладных задачах математической физики и вычислительной математики, приводящие к решению интегральных уравнений Вольтерра первого рода

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра первого рода, линейные интегральные уравнения, интегральный оператор, ядро интегрального уравнения, числовая ось, существование и единственность решения, некорректно поставленные задачи; регуляризация устойчивости решения, приближённые методы решения.

ON ONE CLASS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE AXIS

Kambarova Aisalkyn Daminovna

Associate Professor. Osh State University

ORCID 0009-0004-7885-3932, akambarova@oshsu.kg

Murzabayeva Aitbū Busurmankulovna

Associate Professor. Osh State University

ORCID 0000-0003-0694-6633, amurzabaeva@oshsu.kg

Orozmamatova Jypargul Shermamatovna

Associate Professor. Osh Technological University

ORCID 0000-0002-8847-5478, jypar75@mail.ru

Abstract. This paper considers a class of first-kind linear Volterra integral equations defined on the entire real line. The properties of the integral operator determined by a given kernel are investigated, and the functional spaces in which the solutions are sought are analyzed. Particular attention is paid to the conditions imposed on the kernel of the integral equation that ensure the well-posedness of the problem and the possibility of recovering the

unknown function. The study examines the specifics of equations defined on the entire real line, which introduces additional challenges related to the unboundedness of the integration domain and the behavior of functions at infinity. The research employs methods from functional analysis, the theory of integral operators, and the theory of ill-posed problems. Potential approaches to the regularization of solutions are discussed, allowing for the stabilization of the recovery process in the presence of errors in the input data. Regularizing operators in the sense of M.M. Lavrentiev are constructed to solve this first-kind integral equation. The obtained results are applicable to problems in mathematical physics and computational mathematics that involve solving first-kind Volterra integral equations.

Keywords: Volterra integral equations of the first kind; linear integral equations; integral operator; kernel of the integral equation; real axis; existence and uniqueness of solutions; ill-posed problems; regularization; stability of solutions; approximate solution methods.

Введение. В данной статье рассматривается один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, заданных на всей числовой оси. Основное внимание уделяется исследованию свойств интегрального оператора и ядра, анализу условий существования и единственности решения. Актуальность исследования обусловлена тем, что интегральные уравнения Вольтерра первого рода являются некорректными по Адамару: решение может не существовать, быть не единственным или крайне чувствительным к малым изменениям исходных данных. Это создаёт необходимость разработки методов анализа таких уравнений, изучения условий существования и единственности решений, а также применения методов регуляризации для стабилизации приближённых решений.

Цель статьи заключается в исследовании одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на всей числовой оси и в разработке методов получения устойчивых решений.

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, $u(t)$ – неизвестная функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода исследованы в работах В.Я. Арсенина (1968), Т.Т. Каракеева (2012), М.И. Иманалиева (1978). В частности, в работе (Иманалиев, М.И 1978) доказаны теоремы единственности и построен регуляризирующий оператор для систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на отрезке.

Материалы и методы

В данной статье построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности для решения уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{-\infty}^t K(t,s)v(s, \varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $u_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t)$, $u(t)$ – решение уравнения (1).

Введем обозначения:

1) Обозначим через $C(-\infty, +\infty)$ пространство всех функций $u(t)$ – непрерывных и ограниченных на $(-\infty, +\infty)$, $\|\cdot\|_C$ норма в $C(-\infty, +\infty)$, т.е. для любого

$$u(t) \in C(-\infty, +\infty)$$

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |u(t)|$$

2) Через $L_1(-\infty, +\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty.$$

3) Обозначим через $C_0(-\infty, +\infty)$ – пространство всех функций $u(t) \in C(-\infty, +\infty)$, таких что $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = u_0, u_0 \in R$.

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} |u(t)|$$

4) Через $L_{1,los}(-\infty, +\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких что для любого $T \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^T |u(t)| dt < \infty.$$

5) Обозначим через $C_0^1(-\infty, +\infty)$, пространство всех функций $u(t) \in C_0(-\infty, +\infty)$ таких, что для любых $t \in (-\infty, +\infty)$

$$|u'(t)| \leq M_0 K(t, t),$$

где M_0 – положительная постоянная, $K(t, t) \in L_{1,los}(-\infty, +\infty)$ и $K(t, t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Предположим выполнение следующих условий:

а) $K(t, t) \geq 0$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^t |K(t, s)| ds \in C(-\infty, +\infty), K(t, t) \in L_{1,los}(-\infty, +\infty).$$

б) Для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$,

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| \leq l(s) \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, s) ds \right|,$$

где $0 \leq l(t)$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, $l(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$

Решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$v(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) имеем:

$$\xi(t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(s, s) \xi(s, \varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^t K(t, s) - K(s, s) \right] \xi(s, \varepsilon) ds + [u_0 - u(t)].$$

Отсюда, используя резольвенту $R(t, s, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau}$ ядра $-\frac{1}{\varepsilon} K(s, s)$ имеем

$$\begin{aligned} \xi(t, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t [K(t, s) - K(s, s)] \xi(s, \varepsilon) ds + [u_0 - u(t)] + \\ & + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\varepsilon} K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\tau} [K(\tau, s) - K(s, s)] \xi(s, \varepsilon) ds d\tau - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [u_0 - u(t)] d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, уравнение (4) запишем в виде:

$$\xi(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t H(t, s, \varepsilon) \xi(s, \varepsilon) ds + \varphi(t, \varepsilon), \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} H(t, s, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} [K(t, s) - K(s, s)] + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(\tau, s) - K(s, s)] d\tau, \quad (t, s) \in G, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) = u_0 - u(t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t [K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [u_0 - u(t)]] d\tau. \quad (7)$$

$$G\{(t, s): -\infty < s < t < +\infty\}, t \in (-\infty, +\infty).$$

Результаты и обсуждение

Теорема. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$, где $u(t)$ – решение уравнения (1). Тогда решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq M_1 \varepsilon, \quad (8)$$

$$\text{где } M_1 = M_0 \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} l(s) ds \right\}, \quad |u'(t)| \leq M_0 K(t, t), t \in (-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Учитывая формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} d\tau &= 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} d\tau &= 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) d\tau} \end{aligned}$$

из (6) получили:

$$\begin{aligned} H(t, s, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} [K(t, s) - K(s, s)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} [K(t, s) - K(\tau, s)] d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя по частям, из (7) имеем:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} u'(\tau) d\tau, t \in R. \quad (10)$$

Учитывая условие б), из (9) получили:

$$\begin{aligned} |H(t, s, \varepsilon)| &\leq l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau \right] d\tau = \\ &= l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} + l(s) \int_s^t \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau \right] d\tau \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, имеем:

$$|H(t, s, \varepsilon)| \leq l(s) \int_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} K(\tau, \tau) d\tau = l(s) \left[1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \right].$$

Из последнего неравенства получим

$$|H(t, s, \varepsilon)| \leq l(s), (t, s) \in G = \{(t, s) : -\infty < s \leq t < +\infty\} \quad (11)$$

В силу $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$, из (10) имеем:

$$|\varphi(t, \varepsilon)| \leq \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} u'(\tau) d\tau \leq M_0 \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\tau} K(\tau, \tau) d\tau \leq M_0 \varepsilon.$$

Отсюда получим:

$$\|\varphi(t, \varepsilon)\|_C \leq M_0 \varepsilon. \quad (12)$$

Учитывая (11) и (12) из (5) имеем:

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \int_{-\infty}^t l(s) |\xi(s, \varepsilon)| ds + M_0 \varepsilon, t \in (-\infty, +\infty). \quad (13)$$

Применяя формулу Гронуолла-Белмана из (13) имеем (8). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия а), б) и существует $\delta \in (-\infty, +\infty)$ такое что $K(t, t) > 0$ почти при всех $t \in (-\infty, \delta)$. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_0^1(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in C_0^1(-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (1) при $f(t) = 0, t \in (-\infty, +\infty)$. В этом случае сначала в силу условий а), б) доказываем, что $\lim_{t \rightarrow -\infty} |u(t)| = 0$. В самом деле

$$\int_{-\infty}^t K(t, s) u(s) ds = 0, t \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда, имеем:

$$\int_{-\infty}^t K(s,s)u(s)ds = - \int_{-\infty}^t [K(t,s) - K(s,s)]u(s)ds, t \in (-\infty, \delta). \quad (14)$$

В силу условий *a*) и *b*), из (14) имеем:

$$\left| u(t^*) \right| \left| \int_{-\infty}^t K(s,s)ds \right| = \left| \int_{-\infty}^t K(s,s)u(s)ds \right| \leq \int_{-\infty}^t l(s) \left[\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau \right] ds \|u(t)\|_C,$$

где $-\infty < t^* \leq t \leq \delta$.

Из последнего неравенства получим:

$$\left| u(t^*) \right| \leq \|u(t)\|_C \int_{-\infty}^t l(s)ds, -\infty < t^* \leq t < +\infty$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left| u(t^*) \right| = 0.$$

Далее в силу оценки (8) доказывается $u(t) = 0$ при всех $K(t,s)$ $t \in (-\infty, +\infty)$.

Ниже приведем пример.

Пример. Рассмотрим уравнения (1) и (2) при

$$K(t,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \left[\frac{1}{1+s^2} + \int_s^t \frac{|s|}{(1+s^2)^3} ds \right], (t,s) \in G. \quad (15)$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(s,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^3}, l(s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2}, s \in (-\infty, +\infty).$$

В самом деле, в силу (15) для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$ имеем:

$$K(t_1,s) - K(t_2,s) = \frac{|s|}{(1+s^2)^2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{|s|}{(1+s^2)^3} ds,$$

Отсюда

$$\left| K(t_1,s) - K(t_2,s) \right| \leq l(s) \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds \right|.$$

Поэтому утверждения теоремы справедливы для уравнения (1) и (2), когда $K(t,s)$ определяется по формуле (15).

Выводы. В работе рассмотрен один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, определённых на числовой оси. Анализ показал, что особенности постановки на бесконечной оси приводят к дополнительным математическим трудностям, связанным с поведением функций на бесконечности и неограниченностью области интегрирования. Исследование свойств интегрального оператора и ядра позволило определить условия, обеспечивающие существование и единственность решения рассматриваемого класса уравнений. Показано, что правильная постановка задачи и соблюдение условий на ядро являются ключевыми для получения корректного решения. Рассмотрены методы регуляризации, в частности подходы, основанные на построении регуляризующих операторов по М. М. Лаврентьеву.

Полученные результаты создают основу для дальнейшего исследования линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода и разработки численных методов их решения, применимых в математической физике, инженерных расчётах и других прикладных областях.

Литература

1. Apartsin, A.S. On multilinear Volterra equations of the 1st kind [Text] / A.S. Apartsin // Automation and telemechanics. – 2004. - No. 2 – P. 118-125.
2. Arsenin, V. Ya. On the solution of some integral equations of the first kind, of the convolution type, by the regularization method [Text] / V. Ya. Arsenin, V. V. Ivanov // Zhurnal vzyilit. matem. i matem. physic. – 1968. – 8. - № 2.
3. Asanov, A. Volterra-Stieltjes integral equations of the second and first kind [Text] / A. Asanov // Journal of Natural Sciences KTUM, Bishkek, 2002, No. 2, – P.79-95.
4. Imanaliev, M.I. Generalized solutions of integral equations of the first kind [Text] / M.I. Imanaliev // Frunze: Ilim, 1978. – 144 p.
5. Karakeev T.T., Bugubaeva Zh. Equivalent transformation and regularization of integral Volterra equations of the third kind // Bulletin of KNU - Bishkek, 2012-issue 5-pp. 29-33.
6. Saadabaev, A.S. Finite-dimensional approximation of the solution of an operator equation of the first kind [Text] /A.S.Saadabaev // Studies in integro-differential equations. - Bishkek: Ilim, 1991. - Issue 23. - P. 152 - 155.
7. Srazhidinov, A. Regularization of an integral equation of the first kind of Volterra type with inaccurate data [Text] /A. Srazhidinov // Studies in integro-differential equations. - Frunze: Ilim, 1988. - Issue 21. - P. 57-68.
8. Tagaeva, S. B. Regularization and uniqueness of solutions of Volterra integral equations of the 3rd kind in unbounded domains [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / S. B. Tagaeva. - Bishkek, 2015. - 19 p.
9. Bedelova, N.S. Regularization and uniqueness of solutions of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / S.N. Bedelova. - Osh, 2016. - 20 p.
10. Anikonov, Y.E. Poorly Visidle Media in X-ray Tomografic [Текст]/Y.E. Anikonov,V.G.Nazarov, L.V. Prokhorov//Utrecht, the Netherlands: VSP, 2004-294p.
11. Anikonov, Y.E. Poorly Visidle Media in X – ray Tomografic [Текст] / Y.E. Anikonov, V.G. Nazarov, L.V. Prokhorov // Utrecht, the Netherlands: VSP, 2002 – 294 p.
12. Apartsyn, A.G. Nonclassical linear Volterra Equations of the first kind [Текст] / Y.E. Anikonov, V.G. Nazarov, L.V. Prokhorov // Utrecht The Netherlands: VSP, 2002 – 294 p.
13. Asanov, A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind [Текст] / A. Asanov // Utrecht, VSP, 1998 – 272 p.
14. Asanov, A. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations [Текст] / A. Asanov, E.R. Atamanov // Utrecht, the Netherlands: VSP, 1997 – 152 p.
15. Bughegeim, A.L. Introduction to the Theory of Inverse Problems [Текст] / A.L. Bughegeim // Utrecht, the Netherlands: VSP, 2000 – 232 p.
16. Bughegeim, A.L. Volterra Equations and Inverse Problems [Текст] / A.L. Bughegeim // Utrecht, the Netherlands: VSP, 1999 – 204 p.
17. Denisov, A.M. Elements ot the Theory of Inverse Problems [Текст] / A.M.Denisov // VSP, Utrecht, 1999, 272 p.

18. Imanaliev, M.I. Regularization and Uniqueness of Solutions to Systems of Nonlinear Volterra Integral Equations of the Third Kind [Текст] / M.I. Imanaliev, A. Asanov // Doklady Mathematics, Vol. 76, № 1, 2007 – Pp. 490-493.
19. Shishatsky, S.P., Asanov A., Atamanov E.R. Uniqueness Problems for Degenerating Equations and Nonclassical Problems [Текст] / S.P.Shishatsky, A.Asanov, E.R.Atamanov // – VSP, P.O. – AH Zeist. – 2001, 178 p.
20. Shishatsky, S.P. Uniqueness Problems for Degenerating Equations and Nonclassical Problems [Текст] / S.P. Shishatsky, A. Asanov, E.R. Atamanov// VSP, P.O. – AH Zeist, 2001 – 178 p.
21. Kambarova A.D. Regularization of solutions of one class of systems of linear Volterra integral equations of the first kind on the axis, Kambarova A.D., Toygonbaeva A.K., Bedelova N.S., Murzabaeva A.B. Eurasian Scientific Association. 2021. No. 6-1 (76). P. 34-37. <https://elibrary.ru/contents.asp?id=46338910>
22. Lavrentiev, M.M. Regularization of Volterra-type operator equations [Text] / M.M. Lavrentiev // In the book: Problems of Mathematical Physics and Computational Mathematics. - Moscow: Nauka, 1977, pp. 199-205.
23. Orozmamatova, Zh.Sh. Regularization and uniqueness of solutions of linear integral Fredholm equations of the first kind in unbounded domains [Text]: Abstract of Cand. of Phys. and Mathematics Sciences: 01.01.02 / Zh.Sh. Orozmamatova. – Osh, 2019. – 20 p.
24. Tolubaev, Zh. O. Boundedness and square summability of solutions of Volterra-Stieltjes integro-differential equations [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / Zh. O. Tolubaev. - Bishkek, 2016. - 19 p.
25. Toygonbaeva, A.K. Regularization and uniqueness of the solution of Fredholm-Stieltjes integral equations of the first kind [Text]: author's abstract. dis. ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.02 / A.K. Toygonbaeva. - Osh, 2014. - 20 p.