УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_194

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Сабитов Камиль Басирович, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. АН РБ,
sabitov_fmf@mail.ru
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфа, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий,
г. Стерлитамак, Россия

Аннотация. *В работе для уравнения смешанного типа в прямоугольной области исследована на корректность постановки первой граничной задачи. Установлен критерий единственности. Решение задачи Дирихле построено в виде суммы ряда Фурье.*

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, задача Дирихле, критерий единственности, ряд, существование, малые знаменатели, устойчивость.*

THE DIRICHLET PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH THE LAVRENT'EV–BITSADZE OPERATOR

Sabitov Kamil Basirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan
sabitov_fmf@mail.ru
Institute of Mathematics with Computing Center UFITS, UFA,
Sterlitamak Branch of the State University of Science and Technology,
Sterlitamak, Russia

Abstract. *In this paper, for a mixed-type equation in a rectangular domain, the correctness of the formulation of the first boundary value problem is investigated. A uniqueness criterion is established. The solution of the Dirichlet problem is constructed as the sum of a Fourier series.*

Key words: *mixed type equation, Dirichlet problem, uniqueness criterion, series, existence, small denominators, stability.*

Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

$$\mathcal{L}u \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - bu = F(x,y) \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)| \quad 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha, \beta,\ l$ – заданные положительные числа, b – любое действительное число, и поставим следующую краевую задачу.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}u(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \qquad (3)$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \qquad -\alpha \le y \le \beta; \qquad (4)$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \qquad (5)$$

где $F(x,y)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возникло после опубликования работы Франкля Ф.И. [1], где впервые было отмечено, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к этой задаче. Бицадзе А.В. [2] доказал некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева, т.е. для уравнения (1) при $b = 0$. После этой статьи возникла потребность поиска смешанных областей для которых задача

Дирихле поставлена корректно. В дальнейшем изучением задача Дирихле для уравнения (1) при $b = 0$ занимались Шабат Б.В. [3], Вахания Н.Н. [4], Cannon J.R.[5], Нахушев А.М. [6], Солдатов А.П. [7], Хачев М.М. [8], Сохадзе Р.С. [9], Сабитов К.Б. [10] и его ученики.

В данной работе методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задачи (2) – (5). Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей относительно отношения α/l. В связи с чем установлены оценки малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. На основании этих оценок накладывая определенные условия на граничные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и на правую часть $F(x,y)$ доказана теорема существования в классе регулярных решений (2).

Литература

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике [Текст]/ Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 711 с.

2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа [Текст]/ А.В. Бицадзе // ДАН СССР. 1953. Т. 122. 32. С. 167 – 170.

3. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа [Текст]/ Б.В. Шабат // ДАН СССР. 1957. Т. 112. 3. С. 383 – 389.

4. Вахания Н.Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа [Текст]/ Н.Н. Вахания // Тр. АН ГрузССР. 1963. Т.3. С. 69 – 80.

5. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient // J.R. Cannon // Ann. Math. pura ed Appl. 1963. V. 62. P. 371 – 377.

6. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области [Текст]/ А.М. Нахушев. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. 1. С. 190 – 191.

7. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. I., II. [Текст]/ А.П. Солдатов. // ДАН. 1993. Т. 332. 6. С. 696 – 698; Т. 333. 1. С. 16 – 18.

8. Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике[Текст]/ М.М. Хачев // Дифференц. уравнения. 1975. Т.11. 1. С. 151 – 160.

9. Сохадзе Р.С. О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике [Текст]/ Р.С. Сохадзе // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. 1. С. 127 – 133.

10. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области [Текст]/ К.Б. Сабитов // ДАН. 2007. Т.413. 1. С. 23 – 26.