УДК 517.91
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_239

ОБ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Юлдашев Турсун Камалдинович, д.ф.-м.н., профессор
tursun.k.yuldashev@gmail.com
Ташкентский государственный экономический университет,
Ташкент, Узбекистан
Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, к.ф.-м.н.
jartykova@oshsu.kg
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Рассмотрены вопросы существования и построения нетривиальных решений одной однородной нелокальной краевой задачи для однородного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и двумя действительными параметрами. Был развит метод вырожденного ядра. Изучены особенности, возникшие при построении решений и связанные с определением коэффициентов интегрирования. Вычислены значения спектральных параметров, для которых устанавливаются разрешимость краевой задачи и строятся соответствующие решения.*

Ключевые слова: *Интегро-дифференциальное уравнение, нелокальная задача, вырожденное ядро, разрешимость, регулярные и иррегулярные значения параметров.*

ON A HOMOGENEOUS NONLOCAL PROBLEM FOR A SECOND-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL FREDHOLM EQUATION

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Dr Sc, professor,
tursun.k.yuldashev@gmail.com
Tashkent State University of Economics,
Tashkent, Uzbekistan
Artykova Zhyldyz Abdisalamovna, candidate Sc,
jartykova@oshsu.kg
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The existence and construction of nontrivial solutions of a homogeneous nonlocal boundary value problem for a second order homogeneous integro-differential Fredholm equation with a degenerate kernel and two real parameters are considered. The degenerate kernel method was developed. The features that have arisen in the construction of solutions and are associated with the determination of the integration coefficients are studied. The values of the spectral parameters are calculated, for which the solvability of the boundary value problem is established and the corresponding solutions are constructed.*

Key words: *Integro-differential equation, nonlocal problem, degenerate kernel, solvability, regular and irregular values of parameters.*

1. Постановка задачи. Изучение спектральных свойств и построение решений для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами представляют большой теоретический и практический интерес. Различные спектральные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений рассматривались в [1-7]. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром рассматривались ранее в [8-12]. В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме.

В настоящей работе изучается нелокальная спектральная задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и двумя спектральными параметрами. Вычисляются регулярные и иррегулярные значения спектральных параметров, при которых устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи и строятся соответствующие решения в случае их существования.

Задача. Требуется найти функцию $u(t)$, удовлетворяющую на интервале $(0,T)$ уравнению

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^T K(t,s)\left[s\,u(s)+(T-s)u'(s)\right]d\,s \tag{1}$$

со следующими однородными интегральными условиями

$$u(T)-\int_0^T s\,u(s)\,d\,s=0,\ u'(T)-\int_0^T (T-s)u'(s)\,d\,s=0, \tag{2}$$

где $T>\sqrt{2},$ $\lambda-$положительный параметр, $\nu-$действительный параметр, отличный от нуля, $K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)\neq 0,$ $a_i(t),b_i(s)\in C\,[0,T].$ Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Поскольку краевые условия (2) однородны, однородное интегро-дифференциальное уравнение (1) всегда имеет тривиальные решения. Мы исследуем существование нетривиальных решений. Устанавливаем единственность решения или строим бесконечное множество решений. Определим, что при каких значениях параметров λ и ν задача имеет нетривиальных решений и строим эти решения.

Данная работа отличается от работы [13] не только по методу исследования, но и по содержанию полученных результатов.

2. Интегрирование краевой задачи (1), (2). С учетом вырожденности ядра уравнение (1) записывается в следующем виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\int_0^T\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)\left[s\,u(s)+(T-s)u'(s)\right]d\,s. \tag{3}$$

С помощью обозначения

$$\tau_i=\int_0^T b_i(s)\left[s\,u(s)+(T-s)u'(s)\right]d\,s \tag{4}$$

уравнение (3) перепишется в следующем виде

$$u''(t)+\lambda^2 u(t)=\nu\sum_{i=1}^{k}a_i(t)\,\tau_i$$

и решается методом вариации произвольных постоянных

$$u(t)=A_1\cos\lambda t+A_2\sin\lambda t+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\sin\lambda(t-s)\,a_i(s)\,d\,s, \tag{5}$$

где A_1, A_2 $-$пока произвольные постоянные интегрирования. Путем дифференцирования из (5) получаем

$$u'(t) = -\lambda A_1 \sin\lambda t + \lambda A_2 \cos\lambda t + \nu \sum_{i=1}^{k} \tau_i \int_0^t \cos\lambda(t-s)\, a_i(s)\, d\, s. \qquad (6)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (5) используем однородные интегральные условия (2) и приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_1\chi_{11}(\lambda) + A_2\chi_{12}(\lambda) = \chi_{13}(\lambda), \\ A_1\chi_{21}(\lambda) + A_2\chi_{22}(\lambda) = \chi_{23}(\lambda), \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$\chi_{11}(\lambda) = \cos\lambda T - \frac{T}{\lambda}\sin\lambda T + \frac{1}{\lambda^2}(1-\cos\lambda T), \quad \chi_{12}(\lambda) = \sin\lambda T + \frac{T}{\lambda}\cos\lambda T - \frac{1}{\lambda^2}\sin\lambda T,$$

$$\chi_{21}(\lambda) = -\lambda\sin\lambda T - T - \frac{1}{\lambda}\sin\lambda T, \quad \chi_{22}(\lambda) = \lambda\cos\lambda T - \frac{1}{\lambda}(1-\cos\lambda T),$$

$$\chi_{13}(\lambda) = -\eta(T,\lambda) + \int_0^T s\cdot\eta(s,\lambda)\,ds, \quad \chi_{23}(\lambda) = -\eta'(T,\lambda) + \int_0^T (T-s)\cdot\eta'(s,\lambda)\,ds,$$

$$\eta(t,\lambda) = \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i h_i(t,\lambda), \quad h_i(t,\lambda) = \int_0^t \sin\lambda\,(t-s)\,a_i(s)\,d\,s,\ i=\overline{1,k}.$$

В следующих двух случаях

1) $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{12}(\lambda) = 0,$ 2) $\chi_{21}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) = 0$

следует дополнительно проверять корректность поставленной задачи (1), (2). Если задача корректно поставлена, то строить все решения этой задачи. Если задача не поставлена корректно, то существуют только тривиальные решения.

Исследуем, что в следующих трех случаях

3) $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{21}(\lambda) = 0,$ 4) $\chi_{12}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) = 0,$

5) $\chi_{11}(\lambda)\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\chi_{21}(\lambda) = 0$

нарушается единственность решения поставленной задачи.

Выясняем, что в следующих трех случаях

6) $\chi_{11}(\lambda) = \chi_{21}(\lambda) \neq 0,$ 7) $\chi_{12}(\lambda) = \chi_{22}(\lambda) \neq 0,$

8) $\chi_{11}(\lambda)\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\chi_{21}(\lambda) \neq 0.$

не нарушается единственность решения поставленной задачи (1), (2). В данных случаях находим достаточные условия существования единственного решения и строим это решение.

В данной работе исследуются и другие случаи, связанные с регулярными и иррегулярными значениями второго параметра ν.

Сначала анализируем разрешимость следующих четырех трансцендентных уравнений: $\chi_{ij}(\lambda) = 0, \quad i, j = 1,2.$

1.Совокупность решений уравнений $\chi_{11}(\lambda) = 0$ совпадает с решениями уравнения

$$(4x^2-2T^2)tg^2 x+4T^2x\cdot tg\,x=4x^2,\ x=\frac{\lambda}{2}T>0. \tag{8}$$

2. Совокупность решений уравнений $\chi_{12}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$tg\,y=\frac{T^2y}{T^2-y^2},\ y=\lambda T>0. \tag{9}$$

3. Совокупность решений уравнений $\chi_{21}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$\sin y=-\frac{yT^2}{T^2+y^2},\ y=\lambda T>0. \tag{10}$$

4. Совокупность решений уравнений $\chi_{22}(\lambda)=0$ совпадает с решениями уравнения

$$\cos y=-\frac{T^2}{T^2+y^2},\ y=\lambda T>0. \tag{11}$$

Множества решений трансцендентных уравнений (8)-(11) обозначим через $\Im_i\,(i=1,2,3,4)$, соответственно. Теперь примем обозначения $\Lambda_i=(0,\infty)\setminus\Im_i,\ i=1,2,3,4.$

Первый случай: $\chi_{11}(\lambda)=\chi_{12}(\lambda)=0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{11}^2(\lambda)+\chi_{12}^2(\lambda)=0 \tag{12}$$

имеет решение. Уравнение (12) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$\cos(\lambda T+\varphi)=-\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}, \tag{13}$$

где $\varphi=\arccos\dfrac{\lambda^2-1}{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}.$

Уравнение (13) имеет решение, если её правая часть принадлежит отрезку $[-1,1].$ Если предположим

$$\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}}\geq 1,$$

то получаем

$$\left(\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\lambda^2T^2}-1\right)^2\geq 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (13) имеет решение только при $\lambda=\sqrt{2-T^2}.$ Поскольку $\lambda-$ положительный параметр и $T>\sqrt{2},$ то первый случай невозможен.

Второй случай. Рассмотрим случай $\chi_{21}(\lambda)=\chi_{22}(\lambda)=0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{21}^2(\lambda)+\chi_{22}^2(\lambda)=0 \qquad (14)$$

имеет решение. Уравнение (14) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$\cos(\lambda T+\varphi)=\frac{(\lambda^2+1)^2+1+\lambda^2T^2}{2(\lambda^2+1)\sqrt{1+\lambda^2T^2}}, \qquad (15)$$

где $\varphi=\arccos\dfrac{1}{1+\lambda^2T^2}$.

Уравнение (15) имеет решение, если её правая часть принадлежит отрезку $[-1,1]$. Если предположим

$$\frac{(\lambda^2+1)^2+1+\lambda^2T^2}{2(\lambda^2+1)\sqrt{1+\lambda^2T^2}}\geq 1,$$

то получаем

$$\left(\lambda^2+1-\sqrt{1+\lambda^2T^2}\right)^2\geq 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (15) имеет решение только при $\lambda=\sqrt{T^2-2}$. Корректность задачи (1), (2) в данном случае сводится одновременному выполнению следующих двух условий

$$\int_0^T\cos\left[\sqrt{T^2-2}\,(T-s)\right]ds=0,$$

$$\int_0^T(T-t)\int_0^t\cos\left[\sqrt{T^2-2}\,(t-s)\right]ds=0.$$

Легко проверить, что эти условия не выполняются. Следовательно, в данном случае задача не разрешима, т.е. не существуют нетривиальные решения.

Третий случай: $\chi_{11}(\lambda)=\chi_{21}(\lambda)=0$. Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{11}^2(\lambda)+\chi_{21}^2(\lambda)=0 \qquad (16)$$

имеет решение. Уравнение (16) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$T^2(y^2-T^2)^2\cos^2 y+y^2\left[T^6+(y^2+T^2)^2\right]\sin^2 y-yT^4(y^2-T^2)\sin 2y+$$
$$+2T^4(y^2-T^2)\cos y+yT^2\left[-T^4+2y^4+2y^2T^2\right]\sin y+y^4T^4=0. \qquad (17)$$

Это уравнение имеет счетное число решений.

Четвертый случай: $\chi_{12}(\lambda)=\chi_{22}(\lambda)=0$. Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{12}^2(\lambda)+\chi_{22}^2(\lambda)=0 \qquad (18)$$

имеет решение. Уравнение (18) эквивалентно следующему трансцендентному уравнению

$$T^2(y^2-T^2)^2\sin^2 y+y^2\left[T^6y^2+y^6+2y^4T^2+y^2T^4)\right]\cos^2 y+$$

$$+yT^4(y^2-T^2)\sin 2y-2y^2T^2(y^2+T^2)\cos y+y^2T^4=0. \qquad (19)$$

Это уравнение имеет счетное число решений.

Пятый случай. Это - тот случай, когда основной определитель обращается в нуль: $\Delta=\chi_{11}(\lambda)\cdot\chi_{22}(\lambda)-\chi_{12}(\lambda)\cdot\chi_{21}(\lambda)=0.$ Определим при каких значениях параметра λ имеет место данный случай. Действительно, если этот случай имеет место, то алгебраическое уравнение

$$\chi_{11}(\lambda)\cdot\chi_{22}(\lambda)-\chi_{12}(\lambda)\cdot\chi_{21}(\lambda)=0 \qquad (20)$$

имеет решение. Уравнение (20) эквивалентно сводится к решению следующего трансцендентного уравнения

$$T^4(2+y^2)\cos y+y^3T^2\sin y+y^4-2T^4=0,\ y=\lambda T>0. \qquad (21)$$

Решения этого уравнения (21) существуют.

Множество значений параметра λ, при котором уравнения (17), (19) и (21) имеют решения обозначим через $\Im_5,\Im_6,\Im_7,$ соответственно. С помощью этих обозначений примем новые обозначения

$$\Lambda_5=\left(\Lambda_2\cup\Lambda_4\right)\cap\Im_5,\quad \Lambda_6=\left(\Lambda_1\cup\Lambda_3\right)\cap\Im_6,\quad \Lambda_7=\cup_{i=1}^{4}\Lambda_i\setminus\Im_7.$$

Для значений параметра λ из множеств Λ_5 и Λ_6 построим бесконечное множество решений поставленной задачи (1), (2). Для значений параметра λ из множества Λ_7 исследуем влияние второго параметра ν на разрешимость задачи (1), (2) и при определенных значениях этого параметра построим единственное решение поставленной задачи (1), (2). Значения параметра λ из множеств Λ_5 и Λ_6 назовем иррегулярными, а значения параметра λ из множества Λ_7 назовем регулярными.

Иррегулярные значения параметра λ

Сначала рассмотрим случай значений параметра λ из множества Λ_5. В данном случае, $\chi_{11}(\lambda)=\chi_{21}(\lambda)=0$. Множества Λ_5 разделим на два множества

$$\Lambda_5=\Lambda_{5,1}\cup\Lambda_{5,2},\quad \Lambda_{5,1}=\Lambda_2\cap\Im_5,\ \ \Lambda_{5,2}=\Lambda_4\cap\Im_5.$$

Тогда из системы уравнений (7) определим, что A_1- произвольное постоянное и A_2 имеет два разные значения

$$A_2=\begin{cases}\dfrac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}, & \lambda\in\Lambda_{5,1},\\[2mm] \dfrac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}, & \lambda\in\Lambda_{5,2}.\end{cases} \qquad (22)$$

Подставляя значения A_2 из (22) в представлению (5), получим

$$u(t,\lambda)=A_1\cos\lambda t+\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\sin\lambda t+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\sin\lambda(t-s)a_i(s)\,d\,s,\quad \lambda\in\Lambda_{5,1}, \qquad (23)$$

$$u(t,\lambda)=A_1\cos\lambda t+\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\sin\lambda t+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\sin\lambda(t-s)a_i(s)\,d\,s,\quad \lambda\in\Lambda_{5,2}, \qquad (24)$$

где A_1 – произвольное постоянное.

$$u'(t,\lambda)=-\lambda A_1\sin\lambda t+\lambda\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\cos\lambda t+\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\cos\lambda(t-s)a_i(s)\,ds,\ \ \lambda\in\Lambda_{5,1}, \quad (25)$$

$$u'(t,\lambda)=-\lambda A_1\sin\lambda t+\lambda\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\cos\lambda t+\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_i\int_0^t\cos\lambda(t-s)a_i(s)\,ds,\ \ \lambda\in\Lambda_{5,2}. \quad (26)$$

Подставляя представления (23) и (25) в обозначение (4), приходим к однородной системе алгебраических уравнений (ОСАУ)

$$\tau_i^{\Lambda_{5,m}}-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j^{\Lambda_{5,m}}\Phi_{ij}=\Psi_i^{\Lambda_{5,m}},\ \ m=1,2,\ i=\overline{1,k}, \quad (27)$$

где верхний индекс $\Lambda_{5,m}$ означает множество, которому принадлежат значения параметра λ,

$$\Phi_{ij}=\int_0^T b_i(s)\left[\int_0^s\left[s\cdot\sin\lambda(s-\theta)+\lambda(T-s)\cos\lambda(s-\theta)\right]a_j(\theta)\,d\theta\right]ds,$$

$$\Psi_i^{\Lambda_{5,1}}=\int_0^T b_i(s)\left[s\left(A_1\cos\lambda s+\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\sin\lambda s\right)-\lambda(T-s)\left(A_1\sin\lambda t-\frac{\chi_{13}(\lambda)}{\chi_{12}(\lambda)}\cos\lambda t\right)\right]ds,$$

$$\Psi_i^{\Lambda_{5,2}}=\int_0^T b_i(s)\left[s\left(A_1\cos\lambda s+\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\sin\lambda s\right)-\lambda(T-s)\left(A_1\sin\lambda t-\frac{\chi_{23}(\lambda)}{\chi_{22}(\lambda)}\cos\lambda t\right)\right]ds.$$

Исследуя ОСАУ (27), будем находить достаточные условия существования решений задачи (1), (2) для случая иррегулярных значений параметра λ. Далле, рассмотрим регулярные значения этого параметра λ. Тогда относительно второго параметра ν возможны много случаев. В данной работе строится теория, которая позволяет исследовать разрешимость задачи (1), (2).

Литература

1. Смирнов, Ю.Г. Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах. [Текст]/ Смирнов Ю.Г. //*Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 2015. № 3. –С. 460–468.
2. Завизион, Г.В. Асимптотические решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений с вырождениями. [Текст]/ Завизион Г.В. // Укр. мат. журн. 2003. № 4.–С. 435–445.
3. Смирнов, Ю.Г. Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции на неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению. [Текст]/ Смирнов Ю.Г. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. № 9. –С. 1657–1666.
4. Фалалеев, М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения. [Текст]/ Фалалеев М.В. //Изв. ИркутскГУ. Серия «Математика». 2012. № 2. –С. 90–102.
5. Юрко, В.А. Обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов

первого порядка. [Текст]/ Юрко В.А.//Матем. заметки. 2016. № 6. –С. 939–946.

6. Юлдашев, Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка. [Текст]/ Юлдашев Т. К. // Изв. вузов. Математика. 2015. № 9. –С. 74–79.

7. Юлдашев, Т.К. Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром. [Текст]/ Юлдашев Т.К. //Укр. мат. журн. 2016. № 8. –С. 1115–1131.

8. Юлдашев, Т.К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром. [Текст]/ Юлдашев Т. К. //Дифференц. уравнения. 2017. 53. № 1. –С. 101–110.

9. Yuldashev, T. K. Spectral features of the solving of a Fredholm homogeneous integro-differential equation with integral conditions and reflecting deviation, [Text]/ Yuldashev T. K. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, 12,–С. 2116–2123.

10. Cetinkaya, F. A. A boundary value problem with retarded argument and Discontinuous coefficient in the differential equation. [Text]/ Cetinkaya F. A., Mamedov K. R. // Azerbaijan journal of Mathematics. 2017. № 1. –С. 130–141.

11. Бободжанов, А. А. Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. [Текст]/ Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. //Матем. заметки. 2017. № 1.–С. 28–38.

12. Бойчук, А. А. Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале. [Текст]/ Бойчук А. А., Страх А. П. // Нелинейные колебания. 2014. №1. –С. 32–38.

13. Джумабаев, Д. С. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. [Текст]/ Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А. // Нелинейные колебания. 2015. № 4. –С. 489–506.