УДК 517.946
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_233

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Эргашев Тухтасин Гуламжанович, д.ф.-м.н., профессор,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ»,
Ташкент, Узбекистан
Холмирзаев Мамиржон Ахунжанович, ст.преподаватель,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al Fraganus University (негосударственное ВУЗ),
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В научной литературе вырождающиеся гиперболические уравнения принято делить на два вида: уравнения первого и второго родов. Для уравнений первого рода линия параболического вырождения является геометрическим местом точек возврата семейств характеристик, а для уравнений второго рода прямая параболического вырождения является особой характеристикой – огибающей семейства характеристик, что усложняет исследование уравнений второго рода, поэтому вырождающиеся гиперболические уравнения второго рода во всех отношениях сравнительно мало изучены чем уравнения первого рода. В настоящей работе доказывается, что решение задачи Коши для одного уравнения второго рода, найденное методом Римана, действительно является дважды непрерывно дифференцируемым решением поставленной задачи в замкнутой области.*

Ключевые слова: *вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение второго рода, задача Коши, метод Римана.*

ON THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DEGENERATING HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND KIND

Ergashev Tuhtasin, Dr Sc, professor,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
National Research University "TIIAME", Tashkent, Uzbekistan
Khalmirzayev Mamirjan, teacher,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al-Fraganus University, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In the scientific literature, degenerate hyperbolic equations are usually divided into two types: equations of the first and second kind. For equations of the first kind, the line of parabolic degeneracy is the locus of cusp points of families of characteristics, and for equations of the second kind, the line of parabolic degeneracy is a special characteristic - the envelope of a family of characteristics, which complicates the study of equations of the second kind, so degenerate hyperbolic equations of the second kind are relatively little studied in all respects than equations of the first kind. In this paper, we prove that the solution of the Cauchy problem for a single equation of the second kind, found by the Riemann method, is indeed a twice continuously differentiable solution of the problem in a closed domain.*

Key words: *degenerate hyperbolic equation, equation of the second kind, Cauchy problem, Riemann method.*

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv u_{xx} - y^m u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области $D,$ ограниченной характеристиками

$$x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} = 0, \;\; x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} = 1$$

и $y = 0$ уравнения (1) при $y \geq 0,$ где $m-$действительное число, причем $0 < m < 1.$

Для уравнения (1) прямая параболического вырождения, т.е. $y=0$, является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. Такие вырождающиеся гиперболические уравнения в литературе принято называть уравнениями второго рода.

Известно, что решение уравнения (1) с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x)\,,\ 0\le x\le 1 \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x)\,,\ 0<x<1 \tag{3}$$

имеет вид [1, с.258]:

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\tau(t)ds-$$

$$-\frac{\gamma_1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds+\gamma_2 y\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu(t)ds, \tag{4}$$

где

$$\beta=-\frac{m}{2(2-m)},\quad -\frac{1}{2}<\beta<0,\quad t=x-\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}(1-2s),$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)},\quad \gamma_2=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Если* $\tau\in C^3[0,1]$ *и* $\nu\in C^2[0,1]$, *то функция* $u(x,y)$, *определенная формулой (4), является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2) и (3) в области* D.

Доказательство. Функцию $u(x,y)$ запишем в виде

$$u(x,y)=\gamma_1 u_1(x,y)+\gamma_2 u_2(x,y)$$

где

$$u_1(x,y)=\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\tau(t)ds-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds,$$

$$u_2(x,y)=y\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu(t)ds.$$

В начале доказательства покажем выполнение начальных условий (2) и (3). Так как $u_1(x,0)=\tau(x)$, $u_2(x,0)=0$, то выполнение условия (2) очевидно. Вычислим теперь первую производную по y от функции u_1:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{m}{2(1-m)}y^{-\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\,\tau'(t)ds+$$

$$+\frac{1}{1-m}y^{1-m}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\,\tau''(t)ds\,.$$

Первый интеграл интегрируем по частям, после чего u_{1y} принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{4m}{(1-m)(4-3m)}y^{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds+$$

$$+\frac{1}{1-m}y^{1-m}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\tau''(t)ds.$$

Отсюда легко следует, что $\lim\limits_{y\to+0}\frac{\partial u_1}{\partial y}=0$. Далее, очевидно, что

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u_2}{\partial y}=\nu(x).$$

Таким образом, начальное условие (3) выполняется.

Займёмся с функцией $u_1(x,y)$. Вычислив её вторые производные

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\tau''(t)ds-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'''(t)ds,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{-\frac{m}{2}-1}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds+$$

$$+\frac{6-5m}{2(1-m)}y^{-m}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\tau''(t)ds-$$

$$-\frac{1}{1-m}y^{1-\frac{3m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^3\tau'''(t)ds$$

и подставив их в уравнение (1), получаем:

$$L(u_1)\equiv\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-y^m\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\sum_{i=1}^{4}\Omega_i(x,y),,$$

$$\Omega_1(x,y)=-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\left[1-(1-2s)^2\right]\tau'''(t)ds,$$

$$\Omega_2(x,y)=-\frac{6-5m}{2(1-m)}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\tau''(t)ds,$$

$$\Omega_3(x,y)=\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\tau''(t)ds,$$

$$\Omega_4(x,y)=-\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds.$$

Учитывая равенство

$$1-(1-2s)^2=4s(1-s) \tag{5}$$

первое слагаемое Ω_1 можно привести к виду

$$\Omega_1=-\frac{4}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}(1-2s)\tau'''(t)ds,$$

Осуществляя здесь интегрирование по частям, имеем

$$\Omega_1=-\frac{2(2-m)}{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds+\frac{4-3m}{2(1-m)}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\tau''(t)ds$$

Рассмотрим сумму $\Omega_{123}=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$. Учтя равенство (5) найдем формулу для Ω_{123} в виде

$$\Omega_{123}=-\frac{2m}{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds.$$

Опять интегрируя по частям, получаем

$$\Omega_{123}=-\frac{m(2-m)}{2(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\frac{d}{ds}[\tau'(t)]=$$

$$=\frac{m(2-m)(1+\beta)}{2(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}(1-2s)\tau'(t)ds=$$

$$\Omega_{123}=\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds.$$

Теперь нетрудно заметить, что $\Omega_{123}+\Omega_4=0$, тем самим доказано, что $L(u_1)\equiv 0$.

Далее рассмотрим функцию $u_2(x,y)$. Вычислив её вторые производные

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu''(t)ds,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-\frac{4-m}{2}y^{-\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu'(t)ds+y^{1-m}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)^2\nu''(t)ds$$

и подставив их в уравнение (1), с учетом равенства (5), получаем:

$$L(u_2)=4y\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{1-\beta}\nu''(t)ds+\frac{4-m}{2}y^{\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)\nu'(t)ds\,.$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части $L(u_2)$. После интегрирования по частям оно принимает вид

$$\frac{4-m}{2}y^{\frac{m}{2}}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)\nu'(t)ds=-4y\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{1-\beta}\nu''(t)ds.$$

Теперь уже стало очевидным, что $L(u_2)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Литература

1. Уринов, А.К. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу[Текст]/ Уринов А.К. // Изд. «Фергана», 2015. 216 с.