УДК 517.957
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_210

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СИНУС-ГОРДОНА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор,
ahasanov2002@mail.ru.
Нормуродов Хожимурод Нормуминович, аспирант,
normurodov.96@bk.ru.
Самаркандского государственного университета,
г. Самарканд (Узбекистан),
Худаёров Улугбек Обилмаликович, преподаватель
xudayorov.2022@bk.ru
Самаркандского государственного архитектурно-строительного университета, г. Самарканд (Узбекистан).

Аннотация. *В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций. Вводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного уравнения типа синус-Гордона. Доказано разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе три раза непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формула первого следа, удовлетворяет уравнению типа синус-Гордона.*

Ключевые слова. *Уравнения типа синус-Гордона, оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR SINE-GORDON TYPE EQUATION IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

Khasanov Aknazar Bekdurdiyevich, Dr Sc, professor,
ahasanov2002@mail.ru.
Normurodov Khojimurod Normuminovich, PhD student,
normurodov.96@bk.ru.
Samarkand State University, Samarkand city (Uzbekistan),
Xudayorov Ulugbek Obilmalikovich , teacher,
xudayorov.2022@bk.ru
Samarkand State Architectural and
Construction University, Samarkand (Uzbekistan).

Abstract. *In this paper, the inverse spectral problem method is used to integrate a nonlinear sine-Gordon type equation in the class of periodic infinite-gap functions. The evolution of the spectral data of the periodic Dirac operator is introduced, the coefficient of which is the solution of a nonlinear equation of the sine-Gordon type. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin differential equations in the class of three times continuously differentiable periodic infinite-gap functions is proved. It is shown that the sum of a uniformly convergent functional series constructed by solving the system of Dubrovin's equations and the first trace formula satisfies a sine-Gordon type equation.*

Key words: *Sine-Gordon type equations, Dirac operator, spectral data, Dubrovin's system of equations, trace formulas.*

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона вида:

$$q_{xt} = a(t)e^{mq} + b(t)e^{-mq}, \quad q = q(x,t),\ x \in R,\ t > 0,\ m \in Z \setminus \{0\} \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^3(R) \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t)=q(x,t),\quad q(x,t)\in C^{1,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0). \qquad (3)$$

Здесь $a(t),\, b(t)\in C\big([0,\infty)\big)$–заданные непрерывные ограниченные функции.

Нетрудно убедиться, что условия совместности линейных уравнений

$$y_x=\begin{pmatrix} \frac{m}{2}q'_x(x,t) & -\lambda \\ \lambda & -\frac{m}{2}q'_x(x,t) \end{pmatrix} y\,,\ y_t=\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & a(t)e^{mq(x,t)} \\ b(t)e^{-mq(x,t)} & 0 \end{pmatrix} y\,,$$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

эквивалентны уравнению (1) для функции $q=q(x,t),\ x\in R,\ t>0$.

Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного эволюционного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), синус-Гордона (сГ), уравнения Хирота и т.д. в классе периодический функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма-Лиувилля и Дирака.

С помощью метода обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля и Дирака с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах Итса-Матвеева [3], Дубровина-Новикова [4], Итса-Котлярова [5], Смирнова [6], Матвеева-Смирнова [7], была установлена полная интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон, Хироты и т.д.) в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон и др.) была выведена явная формула через тета-функции Римана.

Таким образом, в этих работах (см. [3-8]) была доказана разрешимость задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений (КдФ, мКдФ, НУШ, синус-Гордон и др.) при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [9-10], а также в работе [11].

В связи с этим класс периодических функций удобно разбить на два множества:

1. Класс периодических конечнозонных функций;
2. Класс периодических бесконечнозонных функций.

Известно [12], что если $q(x)=2a\cos 2x,\ a\neq 0$, то в спектре оператора Штурма-Лиувилля $Ly\equiv -y''+q(x)y,\ x\in R$ открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$ – периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [13].

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений $q(x,t),\ x\in R, t>0,$ задачи (1)-(3) сведением ее к обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x \in R,\ t>0,\ \tau \in R, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} P(x,t) & Q(x,t) \\ Q(x,t) & -P(x,t) \end{pmatrix},\quad P(x,t) \equiv 0,\ Q(x,t) = \frac{m}{2}q'_x(x,t).$$

2. Эволюция спектральных данных

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in R : |\Delta(\lambda)| \le 2\} = R \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}),\ n \in Z \setminus \{0\}$ называются лакунами, где λ_n, корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $y(0,\lambda,\tau,t) = \pm y(\pi,\lambda,\tau,t)$ задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что $\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$, т.е. $\lambda = 0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n \in Z \setminus \{0\}$ и при этом $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n \in Z \setminus \{0\}$. Так как коэффициент в уравнении (4) имеет вид $P(x,t) \equiv 0,\ Q(x,t) = \frac{m}{2}q'_x(x,t)$, то справедливо $\lambda_{-1} = \lambda_0 = \xi_0 = 0$, т.е. $\xi = 0$ является собственным значением задачи Дирихле.

Числа $\xi_n(\tau,t), n \in Z \setminus \{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}$, $n \in Z \setminus \{0\}$ называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in Z \setminus \{0\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n \in Z \setminus \{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Задача восстановление коэффициента $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega(x,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяются однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1\}, n \in Z \setminus \{0\}$.

Если с помощью начальной функции $q_0(x+\tau), \tau \in R,$ построим оператор Дирака $L(\tau,0)$ вида

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega_0(x+\tau)y = \lambda y,\ x \in R,\ \tau \in R \quad (5)$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega_0(x)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2}q_0'(x) \\ \frac{m}{2}q_0'(x) & 0 \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

то мы увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau),\ n\in Z$, полученной задачи не зависят от параметра $\tau\in R,$ т.е. $\lambda_n(\tau)=\lambda_n,\ n\in Z$, а спектральные параметры от параметра τ зависят: $\xi_n^0=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0=\sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z,$ и являются периодическими функциями:

$$\xi_n^0(\tau+\pi)=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau+\pi)=\sigma_n^0(\tau),\ \tau\in R,\ n\in Z.$$

Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n,\ \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau),\ n\in Z\setminus\left\{0\right\}\right\}$ оператора $L(\tau,0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $q(x,t),\ x\in R, t>0,$ решение задачи (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n\in Z\setminus\{0\},$ оператора $L(\tau,t)$ не зависят от параметров τ и t т.е. $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n, n\in Z\setminus\{0\},$ а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z\setminus\{0\}$ удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$1.\ \frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n\left(\xi(\tau,t)\right)\xi_n(\tau,t),\ n\in Z\setminus\{0\}; \tag{6}$$

$$2.\ \frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n\left(\xi(\tau,t)\right)g_n\left(\xi(\tau,t)\right),\ n\in Z\setminus\{0\}. \tag{7}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm1, n\in Z\setminus\left\{0\right\}$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t), n\in Z\setminus\left\{0\right\}$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in Z\setminus\left\{0\right\}, \tag{8}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)=\pm1, n\in Z\setminus\left\{0\right\}$ –спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi), n\in Z\setminus\left\{0\right\}$ участвующие в уравнении (7) определяется по формулам:

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi)=\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}}, \tag{9}$$

$$g_n(\xi)=\frac{ma(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{mq(\tau,t)\right\}.$$

Лемма 1. Справедливы следующие формулы следов

$$q'_\tau(\tau,t)=\frac{2}{m}\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k\left(\xi(\tau,t)\right), \tag{10}$$

$$\left(\frac{m}{2}q_\tau(\tau,t)\right)^2+\frac{m}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right). \tag{11}$$

Далее, учитывая формулы следов (10), систему (7) можно переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\cdot f_n(\xi)\cdot g_n(\xi), \tag{12}$$

где

$$g_n(\xi)=\frac{ma(t)}{2\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{mC(t)+2\int_0^\tau\left(\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k\left(\xi(s,t)\right)\right)ds\right\} \tag{13}$$

Здесь $C(t)$ –некоторая ограниченная непрерывная функция.

В результате замены переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\ n\in Z\setminus\{0\} \tag{14}$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (12) и начальные условия (8) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\ \ x(\tau,t)\big|_{t=0}=x^0(\tau)\in K, \tag{15}$$

где

$$K=\left\{x(\tau,t)=(...,x_{-1}(\tau,t),x_1(\tau,t),...):\ \|x(\tau,t)\|=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\left(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}\right)\left|x_n(\tau,t)\right|<\infty\right\},$$

$$H(x)=(...,H_{-1}(x),H_1(x),...),$$

$$H_n(x)=(-1)^n\sigma_n(0)\cdot g_n(...,\lambda_1+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\sin^2 x_1(\tau,t),...)\times$$

$$\times f_n(...,\lambda_1+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\sin^2 x_1(\tau,t),,...)=(-1)^n\sigma_n(0)g_n\left(x(\tau,t)\right)f_n\left(x(\tau,t)\right).$$

Известно, что если $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(R)$, то $\left(q_0(x)\right)'\in C^2(R).$ Поэтому для длины лакун оператора $L(\tau,0)$, имеет место оценка (см. [15], стр. 98):

$$\gamma_k\equiv\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}=\frac{\left|q_{2k}^2\right|}{2|k|^2}+\frac{\delta_k}{|k|^3}, \tag{16}$$

где

$$\lambda_{2k}=k+\sum_{j=1}^{3}c_jk^{-j}+2^{-2}|k|^{-2}\left|q_{2k}^2\right|+|k|^{-3}\varepsilon_k^+,$$

$$\lambda_{2k}=k+\sum_{j=1}^{3}c_jk^{-j}-2^{-2}|k|^{-2}\left|q_{2k}^2\right|+|k|^{-3}\varepsilon_k^-,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|q_{2k}^2\right|^2<\infty,\ \ \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\varepsilon_k^\pm)^2<\infty,\ \ \delta_k=\varepsilon_k^+-\varepsilon_k^-.$$

Отсюда, учитывая $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, получим

$$\inf_{k\neq n}\left|\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t)\right|\geq a>0 .$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (16), оценим функции

$$\left|f_n\left(x(\tau,t)\right)\right|,\ \left|\frac{\partial f_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m}\right| \text{ и } \left|g_n\left(x(\tau,t)\right)\right|,\ \left|\frac{\partial g_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m}\right|.$$

Лемма 2. Справедливы следующие оценки:

$$C_1\leq\left|f_n\left(x(\tau,t)\right)\right|\leq C_2,\quad \left|\frac{\partial f_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m}\right|\leq C_3\gamma_m, \tag{17}$$

$$\left|g_n\left(x(\tau,t)\right)\right|\leq\frac{C_4}{|n|},\quad \left|\frac{\partial g_n\left(x(\tau,t)\right)}{\partial x_m}\right|\leq C_5\frac{\gamma_m}{n},\quad m,n\in Z\setminus\{0\}, \tag{18}$$

где $C_j>0,\ j=1,2,3,4,5,$ не зависят от параметра m и n.

Лемма 3. Если $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K, т.е. существует константа $L>0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t),y(\tau,t)\in K$ выполняется следующее неравенство

$$\left\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\right\|\leq L\left\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\right\|,$$

где

$$L=C\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_n}{|n|}<\infty . \tag{19}$$

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 3 дает метод нахождения решения задачи (1)-(3). Сначала найдем спектральные данные $\lambda_n,\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z\setminus\{0\}$ оператора Дирака $L(\tau,0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через $\lambda_n,\ \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z\setminus\{0\}$. Решая задачу Коши (12), (8) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n\in Z\setminus\{0\}$. Из формулы следов (10) определим функцию $q_\tau(\tau,t)$, т.е. найдем решение задачи (1)-(3).

Замечание 2. Функция $q_\tau(\tau,t)$ построенная с помощью системы уравнений Дубровина (7), (8) и формулы следа (10) действительно удовлетворяет уравнение (1).

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в (10), (11), (14) и (19) следует из равенств (16) и оценки (17).

Теорема 2. Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию

$$q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^3(R),$$

то существует решение $q_x'(x,t),\ x\in R,\ t>0$ задачи (1)-(3), которое однозначно задается формулой (10) и принадлежит классу $C_{x,t}^{1,1}(t>0)\bigcap C(t\geq 0)$.

Литература

1. Жибер, А.В. Характеристическое кольцо Ли и нелинейные интегрируемые

уравнения[Текст]/ Жибер А.В., Муртозина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. // Москва, Ижевск, 2012.

2. Жибер, А. В. “Уравнения типа Лиувилля” [Текст]/ Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. // Докл. АН СССР, 249:1 (1979), 26–29.

3. Итс, А.Р. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза [Текст]/ Итс А.Р., Матвеев В.Б. // ТМФ, 23:1(1975), с.51-68.

4. Дубровин, Б.А. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза [Текст]/ Дубровин Б.А., Новиков С.П. //ЖЭТФ, 67:12(1974), 2131-2143.

5. Итс, А.Р. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера[Текст]/ Итс А.Р., Котляров В.П. // Докл. АНУССР. Сер. А, 1976, №11, 965-968.

6. Смирнов, А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. [Текст]/ Смирнов А.О. //Матем. сб., 185:8 (1994), с.103-114

7. Матвеев, В.Б. Решения типа «волнубийц» уравнений иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура: единый подход. [Текст]/ Матвеев В.Б., Смирнов А.О. //ТМФ, 2016, Т.186, №2, с. 191-220.

8. Матвеев, В.Б. Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии [Текст]/ Матвеев В.Б., Смирнов А.О. // Зап. научн. Сем. ПОМИ, 2018, том 473, 205-227.

9. Митрапольский, Ю.А. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. [Текст]/ Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н (мл), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г// Киев: Наукова думка, 1987.

10. Захаров, В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи. [Текст]/ Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. // Наука, М., 1980.

11. Matveev, V.B. 30 years of finite-gap integration theory[Text]/ Matveev V.B. // Phil. Trans. R Soc. A (2008) 366, p. 837-875.

12. Ince, E.L. Ordinary Differential Equations [Text]/ Ince E.L. // New York: Dover, 1956.

13. Джаков, П.Б. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. [Текст]/ Джаков П.Б., Митягин Б.С. // УМН. 2006, т.61, №4(370), стр. 77-182.

14. Маннонов, Г.А. Задача Коши для нелинейного уравнения Хирота, в классе периодических бесконечнозонных функций. [Текст]/ Маннонов Г.А., Хасанов А.Б. // Алгебра и анализ. Том 34(2022), No5, с.139-172.

15. Мисюра, Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, Теория функцией, функциональный анализ и их приложения [Текст]/ Мисюра Т.В. // 30, ред. В.А. Марченко, Вища школа, Харьков, 1978, с.90-101; Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака II, 31, 1979, с. 102-109.