УДК 517.926
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_197

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ

Уринов Ахмаджон Кушакович, д.ф.-м.н., профессор,
urinovak@mail.ru
Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли, исследователь
usmonov-doniyor@inbox.ru
Ферганский государственный университет,
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе исследуется задача Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего дробный дифференциальный оператор в смысле Римана-Лиувилля с функцией Бесселя в ядре. Поставленная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Методом последовательных приближений найдено решение интегрального уравнения. Доказано, что найденное решение действительно удовлетворяет условиям поставленной задачи. Получена оценка найденного решения. При выводе формулы для решения поставленной задачи выведена новая специальная функция, которая в частном случае следует функция Миттага – Леффлера. Изучено свойства введенной функции, в частности, выписаны формулы дифференцирования для неё.*

Ключевые слова: *функция Бесселя, дробный дифференциальный оператор, задача Коши, интегральное уравнение, метод последовательных приближений.*

ON A CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING A RIEMANN-LIOUVILLE DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A BESSEL FUNCTION IN THE KERNEL

Urinov Akhmadzhon Kushakovich, Dr Sc, professor,
urinovak@mail.ru
Usmonov Doniyor Abdumutolib ugli, researcher
usmonov-doniyor@inbox.ru
Ferghana State University,
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we study the Cauchy problem for an inhomogeneous ordinary differential equation containing a fractional differential operator in the sense of Riemann-Liouville with a Bessel function in the kernel. The considered problem is equivalently reduced to a Volterra integral equation of the second kind. The solution of the integral equation is found by the method of successive approximations. It has been proved that the obtained solution really satisfies the conditions of the problem. An estimate for the solution is obtained. When deriving a formula for solution to the problem, a new special function was derived, which in a particular case follows the Mittag-Leffler function. The properties of the introduced function are studied, in particular, differentiation formulas for it are written out.*

Key words: *Bessel function, fractional differential operator, Cauchy problem, integral equation, successive approximation method.*

1. Введение. Известно, что теория дробного интегрирования и дифференцирования является одним из новых разделов математической науки [1], [2], [3]. К настоящему времени дробные интегро-дифференциальные операторы в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, а также дифференциальные уравнения, в которых они участвуют, изучены многими исследователями [4] - [8]. В последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению дробных интегро-дифференциальных операторов со специальными функциями в ядрах [9], [10], [11]. В данной работе рассматривается задача Коши для одного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего дифференциальный оператор Римана-Лиувилля с функцией Бесселя в ядре и исследуется существование её решения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)+\lambda y(x)=f(x),\ x\in(0,T), \tag{1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция, а $f(x)$ - заданная функция; α,γ,λ,T - заданные действительные числа, причем $1<\alpha<2$, $T>0$;

$$D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\gamma^2\right)I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x), \tag{2}$$

$$I_{0x}^{\beta,\gamma}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\,\bar{J}_{(\beta-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]y(t)dt, \tag{3}$$

$\bar{J}_\nu(z)$-функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствами

$$\bar{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k} \tag{4}$$

$(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [12], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [13].

Отметим, что операторы $D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)$ и $I_{0x}^{\beta,\gamma}y(x)$ введены и изучены в работе [11]. Они являются обобщениями операторов дробного дифференцирования и интегрирования Римана – Лиувилля соответственно.

Задача Коши. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям

$$\lim_{x\to0}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x)=A_1,\quad \lim_{x\to0}\frac{d}{dx}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x)=A_2, \tag{5}$$

где A_1, A_2 - заданные действительные числа.

3. Исследование задачи Коши. Применяем к уравнению (1) оператор $I_{0x}^{\alpha,\gamma}$. Затем, учитывая равенство [11]

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}D_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)=$$

$$=y(x)-\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x]\lim_{x\to0}\frac{d}{dx}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x)-\frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]\lim_{x\to0}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x)$$

и условие (2), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x)+\lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma}y(x)=I_{0x}^{\alpha,\gamma}f(x)+A_1\frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]+A_2\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x]. \tag{6}$$

Для решения интегрального уравнения (6) применим метод последовательных приближений [14]:

$$y_0(x)=I_{0x}^{\alpha,\gamma}f(x)+A_1\frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\bar{J}_{(\alpha-3)/2}[\gamma x]+A_2\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{J}_{(\alpha-1)/2}[\gamma x],$$

$$y_m(x)=y_0(x)-\lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_{m-1}(x),\ m\in\mathbb{N}.$$

Используя формулу [11] $I_{ax}^{\alpha,\gamma}I_{ax}^{\beta,\gamma}\varphi(x)=I_{ax}^{\beta,\gamma}I_{ax}^{\alpha,\gamma}\varphi(x)=I_{ax}^{\alpha+\beta,\gamma}\varphi(x)$, вычисляем $y_m(x)$:

$$y_m(x)=y_0(x)-\lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_0(x)+\lambda^2I_{0x}^{2\alpha,\gamma}y_0(x)-\lambda^3I_{0x}^{3\alpha,\gamma}y_0(x)+\ldots+(-\lambda)^m I_{0x}^{\alpha m,\gamma}y_0(x). \tag{7}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (7) и подставляя выражение $y_0(x)$, получим решение уравнения (6) в виде

$$y(x) = \frac{A_1}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-2} \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma x] \right\} +$$

$$+ \frac{A_2}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-1} \overline{J}_{(\alpha-1)/2} [\gamma x] \right\} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\alpha n+\alpha,\gamma} f(x). \qquad (8)$$

Вычислим интегралы $I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-2} \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma x] \right\}$, $I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-1} \overline{J}_{(\alpha-1)/2} [\gamma x] \right\}$ и $I_{0x}^{\alpha n+\alpha,\gamma} f(x)$. Сначала рассмотрим интеграл $I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-2} \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma x] \right\}$. Согласно равенству (3), имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-2} \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma x] \right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^x (x-t)^{\alpha n-1} t^{\alpha-2} \overline{J}_{(\alpha n-1)/2} [\gamma (x-t)] \, \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma t] dt. \qquad (9)$$

Заменяя функцию $\overline{J}_\nu(x)$ по формуле (4), получим

$$\overline{J}_{(\alpha n-1)/2} [\gamma (x-t)] \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma (t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\gamma/2)^{2m} (x-t)^{2m}}{m! ((\alpha n+1)/2)_m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\gamma/2)^{2k} t^{2k}}{k! ((\alpha-1)/2)_k}.$$

Отсюда, применяя правило Коши об умножении сходящихся рядов, имеем

$$\overline{J}_{(\alpha n-1)/2} [\gamma (x-t)] \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma t] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (\gamma/2)^{2k} (x-t)^{2k}}{k! ((\alpha n+1)/2)_k} \frac{(-1)^{m-k} (\gamma/2)^{2m-2k} t^{2m-2k}}{(m-k)! ((\alpha-1)/2)_{m-k}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\gamma/2)^{2m} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-t)^{2k} t^{2m-2k}}{k! (m-k)! ((\alpha n+1)/2)_k ((\alpha-1)/2)_{m-k}}.$$

Подставляя это в интеграл (9), поменяв порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma} \left\{ x^{\alpha-2} \overline{J}_{(\alpha-3)/2} [\gamma x] \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\gamma/2)^{2m}}{\Gamma(\alpha n)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k! (m-k)! ((\alpha n+1)/2)_k ((\alpha-1)/2)_{m-k}} \int_0^x (x-t)^{\alpha n+2k-1} t^{2m-2k+\alpha-2} dt. \qquad (10)$$

В интеграле выполним замену переменной по формуле $t = xs$:

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha n+2k-1} t^{2m-2k+\alpha-2} dt = x^{\alpha n+2m+\alpha-2} \int_0^1 (1-s)^{\alpha n+2k-1} s^{2m-2k+\alpha-2} ds. \qquad (11)$$

Принимая во внимание интегральное представление бета-функции и её связь с гамма-функцией [12], находим

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha n+2k-1} t^{2m-2k+\alpha-2} dt = x^{\alpha n+2m+\alpha-2} B(2m-2k+\alpha+1, \alpha n+2k) =$$

$$= x^{\alpha n+2m+\alpha-2} \Gamma(2m-2k+\alpha-1) \Gamma(\alpha n+2k) / \Gamma(\alpha n+2m+\alpha-1).$$

Подставляя это в (10) и применяя последовательно следующие равенства [12]

$$\Gamma(a+n) = (a)_n \Gamma(a), \; (a)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{a+1}{2}\right)_n, \qquad (12)$$

имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=$$

$$=\Gamma(\alpha-1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{\Gamma(\alpha n+2m+\alpha-1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\alpha n)_{2k}(\alpha-1)_{2m-2k}}{k!(m-k)!((\alpha n+1)/2)_k((\alpha-1)/2)_{m-k}}=$$

$$=\Gamma(\alpha-1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}2^{2m}x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{\Gamma(\alpha n+2m+\alpha-1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{((\alpha n)/2)_k(\alpha/2)_{m-k}}{k!(m-k)!}.$$

Учитывая следующее известное равенство,

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(\delta)_k(\gamma)_{m-k}}{k!(m-k)!}=\frac{(\delta+\gamma)_m}{m!},\qquad(13)$$

из последнего получим

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\Gamma(\alpha-1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma^{2m}((\alpha n+\alpha)/2)_m x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{m!\Gamma(\alpha n+2m+\alpha-1)}.$$

Отсюда, применяя последовательно равенства (12) к $\Gamma(\alpha n+2m+\alpha-1)$, находим

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{\alpha n+2m+\alpha-2}}{m!((\alpha n+\alpha-1)/2)_m}.$$

Тогда, согласно обозначению (4), имеем

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-2}\overline{J}_{(\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\frac{x^{\alpha n+\alpha-2}\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)}\overline{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}\left[\gamma x\right].\qquad(14)$$

Аналогичным методом находим

$$I_{0x}^{\alpha n,\gamma}\left\{x^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma x\right]\right\}=\frac{x^{\alpha n+\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}\overline{J}_{(\alpha n+\alpha-1)/2}\left[\gamma x\right].\qquad(15)$$

На основании формулы (3)

$$I_{0x}^{\alpha n+\alpha,\gamma}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}\int_0^x(x-z)^{\alpha n+\alpha-1}\,\overline{J}_{(\alpha n+\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]f(z)dz.\qquad(16)$$

Подставляя (14), (15) и (16) в (8), находим решение уравнения (6):

$$y(x)=A_1x^{\alpha-2}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]+A_2x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]+$$

$$+\int_0^x(x-z)^{\alpha-1}\,\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\alpha};\gamma(x-z)\right]f(z)dz,\qquad(17)$$

где

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[x;y\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\overline{J}_{\alpha n/2+\theta}(y).\qquad(18)$$

Очевидно, что (18) есть функция типа функции Миттага - Леффлера [15]:

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.\qquad(19)$$

Нетрудно показать, что при $\alpha>0,\beta>0$ ряд (18) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty<x,\,y<+\infty$.

Для функции (18) справедливы следующие равенства

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[x;0\right]=E_{\alpha,\beta}\left(x\right),\ \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[0;y\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\bar{J}_{\theta}\left(y\right),\ \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[0;0\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}$$

и следующие формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}\mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]=-\lambda x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]-\gamma^{2}x\mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],\tag{20}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]\right\}=x^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\beta-1,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],\beta\neq 1.\tag{21}$$

4. Основные результаты

Теорема. *Если* $f\left(x\right)=x^{-p}f_{1}\left(x\right),\ f_{1}\left(x\right)\in C\left[0,T\right],0\leq p<\alpha-1$, *то решение задачи Коши* $\left\{\left(1\right),\left(5\right)\right\}$ *существует и определяется формулой (17).*

Доказательство. С этой целью функцию $y\left(x\right)$, определяемую формулой (17), запишем в виде $y\left(x\right)=y_{1}\left(x\right)+y_{2}\left(x\right)+y_{3}\left(x\right)$, где

$$y_{1}\left(x\right)=A_{1}x^{\alpha-2}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],$$

$$y_{2}\left(x\right)=A_{2}x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],$$

$$y_{3}\left(x\right)=\int_{0}^{x}\left(x-z\right)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda\left(x-z\right)^{\alpha};\gamma\left(x-z\right)\right]f\left(z\right)dz,$$

Рассмотрим функцию $y_{1}\left(x\right)$. Сначала вычисляем $I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_{1}\left(x\right)$:

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_{1}\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\int_{0}^{x}\left(x-z\right)^{1-\alpha}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma\left(x-z\right)\right]y_{1}\left(z\right)dz=$$

$$=\frac{A_{1}}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\int_{0}^{x}\left(x-z\right)^{1-\alpha}z^{\alpha-2}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma\left(x-z\right)\right]\mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda z^{\alpha};\gamma z\right]dz=$$

$$=A_{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\lambda\right)^{n}}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha-1\right)}\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\int_{0}^{x}\left(x-z\right)^{1-\alpha}z^{\alpha n+\alpha-2}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma\left(x-z\right)\right]\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}\left[\gamma z\right]dz.$$

Если ввести обозначение

$$H\left(\alpha,n,\gamma;x\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha n+\alpha-1\right)\Gamma\left(2-\alpha\right)}\int_{0}^{x}\left(x-z\right)^{1-\alpha}z^{\alpha n+\alpha-2}\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma\left(x-z\right)\right]\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}\left[\gamma z\right]dz,\tag{22}$$

то последнее равенство запишется в виде:

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_{1}\left(x\right)=A_{1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\lambda\right)^{n}H\left(\alpha,n,\gamma;x\right).\tag{23}$$

Вычислим интеграл $H\left(\alpha,n,\gamma;x\right)$. С этой целью, заменяя функцию $\bar{J}_{\nu}\left(x\right)$ по формуле (4) и применяя правило Коши об умножении сходящихся рядов, имеем

$$\bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left[\gamma\left(x-z\right)\right]\bar{J}_{(\alpha n+\alpha-3)/2}\left[\gamma z\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}z^{2k}}{k!((\alpha n+\alpha-1)/2)_k}\frac{(-1)^{m-k}(\gamma/2)^{2m-2k}(x-z)^{2m-2k}}{(m-k)!((3-\alpha)/2)_{m-k}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\gamma/2)^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{z^{2k}(x-z)^{2m-2k}}{((\alpha n+\alpha-1)/2)_k((3-\alpha)/2)_{m-k}k!(m-k)!}.$$

Подставляя это в интеграл (22), поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=0}^{m}\frac{H_1(\alpha,n,m,k;x)}{((\alpha n+\alpha-1)/2)_k((3-\alpha)/2)_{m-k}k!(m-k)!},\qquad(24)$$

где

$$H_1(\alpha,n,m,k;x)=\int_0^x(x-z)^{1+2m-2k-\alpha}z^{\alpha n+2k+\alpha-2}dz.$$

Интеграл $H_1(\alpha,n,m,k;x)$ вычисляется аналогично интегралу (11):

$$H_1(\alpha,n,m,k;x)=x^{2m+\alpha n}\frac{\Gamma(2m-2k+2-\alpha)\Gamma(\alpha n+2k+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha n+2m+1)}.$$

Подставляя это в (24) и применяя последовательно формулу (12) к функциям $\Gamma(2m-2k+2-\alpha)$ и $\Gamma(\alpha n+2k+\alpha-1)$, имеем

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{2m+\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+2m+1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{(2-\alpha)_{2m-2k}(\alpha n+\alpha-1)_{2k}}{((\alpha n+\alpha-1)/2)_k((3-\alpha)/2)_{m-k}k!(m-k)!}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma^{2m}x^{2m+\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+2m+1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{((2-\alpha)/2)_{m-k}((\alpha n+\alpha)/2)_k}{k!(m-k)!}.$$

Если учесть равенство (13), то функция $H(\alpha,n,\gamma;x)$ принимает вид

$$H(\alpha,n,\gamma;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma^{2m}((\alpha n+2)/2)_m x^{2m+\alpha n}}{m!\Gamma(\alpha n+2m+1)}.$$

Подставляя это выражение функции $H(\alpha,n,\gamma;x)$ в (23), получим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_1(x)=A_1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n(-1)^m\gamma^{2m}((\alpha n+2)/2)_m x^{2m+\alpha n}}{m!\Gamma(\alpha n+2m+1)}.$$

Далее, применяя последовательно равенство (13) к $\Gamma(\alpha n+2m+1)$, имеем

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y_1(x)=A_1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{2m+\alpha n}}{m!\Gamma(\alpha n+1)((\alpha n+1)/2)_m}.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (19), находим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_1(x) = A_1 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right]. \qquad (25)$$

Аналогичным методом находим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_2(x) = A_2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right], \qquad (26)$$

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y_3(x) = \int_0^x (x-z) \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \qquad (27)$$

Складывая равенства (25), (26) и (27), получим

$$I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = A_1 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] + A_2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] +$$

$$+\int_0^x (x-z) \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \qquad (28)$$

Отсюда, используя формулы (20), (21) и $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;0] = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}$, находим

$$\frac{d^2}{dx^2} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = -\lambda A_1 x^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] - \gamma^2 A_1 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] -$$

$$-\lambda A_2 x^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] - \gamma^2 A_2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] -$$

$$+ f(x) - \lambda \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z)\right] f(z) dz -$$

$$-\gamma^2 \int_0^x (x-z) \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \qquad (29)$$

Тогда, из равенств (28) и (29) следует, что

$$D_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2\right) I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) =$$

$$= -\lambda A_1 x^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] - \lambda A_2 x^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] +$$

$$f(x) - \lambda \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z)\right] f(z) dz. \qquad (30)$$

Сопоставляя (17) и (29) придем, к выводу, о том что функция $y(x)$, определяемая формулой (17), удовлетворяет уравнению (1).

Теперь покажем, что она удовлетворяет условиям (5).

Из равенства (28), в силу $f(x) = x^{-p} f_1(x)$, сразу следует, что $\lim\limits_{x\to 0} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = A_1$.

Дифференцируем равенство (28). Тогда, согласно (20), (21), получим

$$\frac{d}{dx} I_{0x}^{2-\alpha,\gamma} y(x) = -A_1 \lambda x^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] - A_1 \gamma^2 x \mathbb{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] +$$

$$+A_2 \mathbb{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^\alpha; \gamma x\right] + \int_0^x (x-z)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1,(\alpha-3)/2}\left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z)\right] f(z) dz.$$

Отсюда, в силу $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;0]=\Gamma^{-1}(\beta)$, $1<\alpha<2$ и $f(x)=x^{-p}f_1(x)$, следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d}{dx}I_{0x}^{2-\alpha,\gamma}y(x)=A_2$.

Теорема доказана.

Лемма. *Если* $\lambda>0$*, то для решения (17) справедливо неравенство*

$$\left|x^{2-\alpha}y(x)\right|\le|A_1|C_1+|A_2|C_2+C_3\int_0^T|f(z)|dz,$$

где C_1, C_2 *и* C_3 *- некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Учитывая (4) и (18), запишем функцию $x^{2-\alpha}y(x)$ в виде

$$x^{2-\alpha}y(x)=$$

$$=A_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)}+A_1\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}\right)(-1)^{m+1}(-\lambda x^\alpha)^n(\gamma/2)^{2m+2}x^{2m+2}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}+m+1\right)(m+1)!}+$$

$$+A_2x\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha+1}{2}\right)(\gamma/2)^{2m}x^{2m}(-\lambda x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha)\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}+m+1\right)m!}+$$

$$+x^{2-\alpha}\int_0^x(x-z)^{\alpha-1}f(z)\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha+1}{2}\right)\left[-\lambda(x-z)^\alpha\right]^n\left[\gamma(x-z)\right]^{2m}}{\Gamma(\alpha n+\alpha)m!\Gamma\left(\frac{\alpha n+\alpha-1}{2}+m+1\right)}dz.\quad(31)$$

Используя равенства

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)}=\frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^1\xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}d\xi,\qquad\Gamma(a+1)=a\Gamma(a),$$

и учитывая $\Gamma(a+1)=a!$ при $a\in N$, перепишем (30) в виде

$$x^{2-\alpha}y(x)=$$

$$=A_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)}-A_1\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}(-\lambda x^\alpha)^n(\gamma/2)^{2m+2}x^{2m+2}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+2)}\int_0^1\xi^m(1-\xi)^{\frac{\alpha n+\alpha-3}{2}}d\xi+$$

$$+\frac{A_2x}{2}\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}x^{2m}(-\lambda x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma^2(m+1)}\int_0^1\xi^m(1-\xi)^{\frac{\alpha n+\alpha-3}{2}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}x^{2-\alpha}\int_0^x(x-z)^{\alpha-1}f(z)\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\left[-\lambda(x-z)^\alpha\right]^n\left[\gamma(x-z)\right]^{2m}}{\Gamma(\alpha n+\alpha-1)\Gamma^2(m+1)}\int_0^1\xi^m(1-\xi)^{\frac{\alpha n+\alpha-3}{2}}d\xi dz.$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (4) и (19), имеем

$$x^{2-\alpha}y(x)=A_1E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda x^\alpha)-$$

$$-\frac{1}{4}(\gamma x)^2 A_1\int_0^1 (1-\xi)^{\frac{\alpha-3}{2}} E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda x^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha/2}\right)\bar{J}_1\left(\gamma x\sqrt{\xi}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}A_2 x\int_0^1 (1-\xi)^{\frac{\alpha-3}{2}} E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\lambda x^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha/2}\right)\bar{J}_0\left(\gamma x\sqrt{\xi}\right)d\xi+$$

$$+\frac{x^{2-\alpha}}{2}\int_0^x (x-z)^{\alpha-1} f(z)\int_0^1 (1-\xi)^{\frac{\alpha-3}{2}} E_{\alpha,\alpha-1}\left[-\lambda (x-z)^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha/2}\right]\bar{J}_0\left[\gamma (x-z)\sqrt{\xi}\right]d\xi dz.$$

Известно, что при $\nu > (-1/2)$ справедливо неравенство [13] $\left|\bar{J}_{\nu}(\gamma z)\right| \le 1$, а при $\alpha, \beta > 0,\ z \ge 0$ - неравенство [15] $\left|E_{\alpha,\beta}(-z)\right| \le C_0$, где C_0 - некоторое положительное число. Если учесть эти неравенства и $1 < \alpha < 2$, то из последнего равенства легко следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Литература

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. [Текст]/ Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. // – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст]/ Нахушев А.М.. – Москва, Физматлит, 2003. – 272 с.

3. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. [Text]/ Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. – Amsterdam, North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006. – 522 p.

4. Джрбашян, М.М., Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка [Текст]/ Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. // Изв. АН АрмССР. Mat. – 1968. – 3 (1), – С. 3-29.

5. Джрбашян, М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма – Лиувилля[Текст]/ Джрбашян М. М. // Изв. АН АрмССР. Mat. – 1970. – 5 (2), – С. 71-96.

6. Нахушев, А. М. Задача Штурма – Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах[Текст]/ Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. – 1977. – 234 (2). – С. 308-311.

7. Алероев, Т. С. К проблеме о нулях функции Миттага – Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка[Текст]/ Алероев Т. С. // Дифференц. уравнения. – 2000. – 36 (9). – С. 1278-1279.

8. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка [Текст]/ Псху А. В. – Москва. Наука, 2005. – 199 с.

9. Prabhakar, T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel[Text]/ Prabhakar T.R. //. 1969.

10. Liguo, Y. Comparison theorems of tempered fractional differential equations[Text]/ Liguo Y., Song Z., Zhouchao W. // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2022. – 231. pp. 2477-2485.

11. Уринов, А.К. Обобщение интегралов и производных дробного порядка Римана - Лиувилля с помощью функции Бесселя[Текст]/ Уринов А.К. // Бюллетень Института математики. – 2022. – 5(1). – С. 108-155.

12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра[Текст]/ Бейтмен Г., Эрдейи А.// – Москва. Наука, – 1965. – 296 с.

13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены[Текст]/ Бейтмен Г., Эрдейи А.// Москва. Наука, – 1966. – 296 с.

14. Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. [Текст]/ Михлин С. Г. // Москва. Физматлит, – 1959. – 232 с.

15. Бейтмен, Г., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. [Текст]/ Бейтмен Г., Эрдейи А. // – Москва. Наука, – 1967. – 300 с.