УДК 519.683.5
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_187

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА ТИПА ФРЕДГОЛЬМА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИИ

Саадабаев Аскербек, д.ф.-м.н, профессор,
Caadabaev@mail.ru
Усенов Изат Абдраевич, к.ф.-м.н., доцент
iausen@mail.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына,
Кыргызстан, Бишкек

Аннотация. *Рассматривается метод регуляризации решения нелинейного интегрального уравнения типа Фредгольма в пространстве непрерывных функции. На основе метода лежит метод Лаврентьева М.М. Построен регуляризирующий оператор. Выбрана зависимость параметра регуляризации от погрешности. Получена скорость сходимости приближенного решения к точному решению исходного уравнения.*

Ключевые слова*: нелинейное интегральное уравнение, регуляризирующий оператор, уравнение типа Фредгольма, регуляризация Лаврентьева, пространство непрерывных функции.*

ФРЕДГОЛЬМ ТИБИНДЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ФУНКЦИЯЛАР МЕЙКИНДИГИНДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

Саадабаев Аскербек, ф.-м.и.д., профессор,
Caadabaev@mail.ru
Усенов Изат Абдраевич, ф.-м.и.к., доцент
iausen@mail.ru
Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,
Кыргызстан, Бишкек

Аннотация. *Фредгольм тибиндеги сызыктуу эмес интегралдык теңдемени чыгарылышын регуляризация ыкмасы үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде каралат. Методдун негизинде М.М. Лаврентьевдин ыкмасы турат. Регуляризация параметринин каталыктан көз карандылыгы аныкталды. Берилген теңдеменин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын жыйналуучулугунун ылдамдыгы алынды.*

Ачкыч сөздөр: *сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, регуляризациялоочу оператор, Фредгольм тибиндеги теңдеме, Лаврентьев регуляризациясы, үзгүлтүксүз функциялар мейкиндик.*

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND OF FREDHOLM TYPE IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Saadabaev Askerbek, Dr.Sc, Professor,
Caadabaev@mail.ru
Usenov Izat Abdraevich, Ph.D., Associate Professor
iausen@mail.ru
Kyrgyz National University named after J. Balasagyn,
Kyrgyzstan, Bishkek

Abstract. *The method of regularization of the solution of a nonlinear integral equation of Fredholm type in the space of continuous functions is considered. The method is based on the method of Lavrentiev M.M. A regularizing operator is constructed. The dependence of the regularization parameter on the error is chosen. The rate of convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is obtained.*

Key words: *nonlinear integral equation, regularizing operator, Fredholm type equation, Lavrentiev regularization, space of continuous functions.*

1. Введение

Линейное интегральное уравнение первого рода и его регуляризируемость исследованы в работах Лаврентьева М.М. [1]. Регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения построен впервые Лаврентьевым М.М. как решение интегрального уравнения второго рода с малым параметром.

В данной работе рассматривается нелинейное интегральное уравнение первого рода вида

$$\int_0^1 К(t,s)M\big(s,z(s)\big)ds = u(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $K(t,s)$ ядро интегрального уравнения определено в квадрате $0 \le t,s \le 1$ и непрерывно в этой области, $M(t,s)$ нелинейная функция определенная в полосе $-\infty < z \le +\infty, 0 \le s \le 1$, функция непрерывна в этой полосе и удовлетворяет условию Липшица по z, $z(s)$- искомая, $u(t) -$ заданная непрерывные функции.

Допустим, что при $u(t) = u_0(t)$ уравнение имеет единственное решение $z_0(t)$.

Решение уравнения (1) принадлежит существенно некорректно поставленным задачам, т.е. нарушаются все три условия Адамара:

1) решение уравнения (1) существует не для всех $u(t) \in C_{[0,1]}$;
2) решение не является единственным;
3) решение не является устойчивым от правой части $u(t)$, т.е. малое изменение правой части по метрике пространства $C_{[0,1]}$ приводит к большому изменению решения $z(s)$ по метрике $C_{[0,1]}$.

2. Регуляризация

Для построения регуляризирующего оператора наряду с уравнением (1) введем уравнение второго рода

$$\alpha z(t) + \int_0^1 К(t,s)M\big(s,z(s)\big)ds = u(t), \tag{2}$$

где $\alpha > 0$- малый параметр и называется параметром регуляризации.

Покажем, что нелинейное интегральное уравнение при некоторых условиях на функции $M(t,s)$ и для любой заданной функции $u(t) \in C_{[0,1]}$ при $\alpha > 0$ имеет единственное решение $z_\alpha(t) \in C_{[0,1]}$.

Пусть ядро $K(t,s)$ положительно определено.

Уравнение (2) запишем в виде

$$\alpha z(t) + \int_0^1 К(t,s)z(s)ds + \int_0^1 К(t,s)\Big(M\big(s,z(s)\big) - z(s)\Big)ds = u(t). \tag{3}$$

Введем обозначения

$$Кz = \int_0^1 К(t,s)z(s)ds\,, \mathrm{B}z = \int_0^1 К(t,s)\Big(M\big(s,z(s)\big) - z(s)\Big)ds. \tag{4}$$

В этих обозначениях уравнение запишется в виде

$$\alpha z(t) + Kz + Bz = u(t). \tag{5}$$

Функция $M(t,s)$ по аргументу z удовлетворяет условию Липшица

$$|\mathrm{M}(s,z_1(s) - \mathrm{M}(s,z_2(s)| \le N|z_1(s) - z_2(s)|.$$

Тогда нелинейный оператор Bz отображает пространство $C_{[0,1]}$ в себя и удовлетворяет условию Липшица по z. Действительно

$$|Bz_1 - Bz_2| = \left|\int_0^1 К(t,s)\Big(M\big(s,z_1(s)\big) - M\big(s,z_2(s)\big) - z_1(s) + z_2(s)\Big)ds\right| \le$$
$$\le K_0(N+1)|z_1 - z_2|, \tag{6}$$

где $K_0 = max_{0\le t,s\le 1}|K(t,s)|$.

Линейный оператор Kz действует из пространства $C_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$ и является положительным оператором.

В работе [3] показано, что оператор $\alpha\text{Е} + \text{К}$ в пространстве имеет обратный оператор т.е. уравнение $(\alpha E + K)z = u$ имеет единственное решение в пространстве $C_{[0,1]}$.

В этой же работе доказано, что норма оператора $(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}{}_{C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}}$ удовлетворяет неравенству

$$\|(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}\|_{C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}} \le \frac{\text{C}_0}{\alpha^2}. \qquad (7)$$

Введем обозначение

$$B_1 z = u(t) - Bz. \qquad (8)$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$z = (\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}u(t) - (\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}Bz. \qquad (9)$$

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор

$$(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}Bz = (\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K\left(M\big(s, z(s)\big) - z(s)\right). \qquad (10)$$

В силу (4) интегральный оператор $(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K$ действует из пространства $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$ является ограниченным оператором и норма этого оператора ограничена, т.е. справедливо неравенство

$$\|(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K\|_{L_2[0,1]\to L_2[0,1]} \le 1. \qquad (11)$$

В данной работе доказано, что норма оператора $(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K$ из пространства $C^2{}_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$ ограничена, т.е. имеет место неравенство

$$\|(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K\|_{C^2{}_{[0,1]}\to C_{[0,1]}} \le K_1, \qquad (12)$$

где K_1- некоторая постоянная.

Нелинейный оператор $(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K\left(M\big(s, z(s)\big) - z(s)\right)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|(\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K\left(M\big(s, z_1(s)\big) - z_1(s)\right) - (\alpha\text{Е} + \text{К})^{-1}K\left(M\big(s, z_2(s)\big) - z_2(s)\right)\right\| \le K_1(N+1)\|z_1 - z_2\|. \qquad (13)$$

Допустим, что постоянная Липшица $K_1(N+1)$ удовлетворяет условию

$$N_1 = K_1(N+1) < 1. \qquad (14)$$

При выполнении условия (14) нелинейное уравнение (9) в силу теоремы Банаха имеет единственное решение представимое в виде

$$z_\alpha = (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,.) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}u(t). \qquad (15)$$

Обозначим решение уравнения (9) при $u(t) = u_0(t)$ через z_α^0. Покажем, что решение уравнения (9) $z_\alpha^0(t)$ при $\alpha \to 0$ по норме пространства $C_{[0,1]}$ сходится к точному решению уравнения (1) при $u(t) = u_0(t)$.

Действительно из (1) получаем тождество

$$u_0(t) = Kz_0 + K(M(s, z_0) - z_0). \qquad (16)$$

Тогда из (15) учитывая тождество (16) получаем

$$z_\alpha^0 - z_0 = (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}(Kz_0 + K(M(s, z_0) - z_0) - z_0 =$$
$$= (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}\alpha(\alpha E + K)^{-1}z_0 \qquad (17)$$

Предположим, что точное решение $z_0(t) \in C^{2+\sigma}{}_{[0,1]}$, где $0 < \sigma < 1$.

Тогда из (17) получаем оценку

$$\|z_\alpha^0 - z_0\|_{C[0,1]} \le \frac{\alpha^\sigma}{1 - N_1}K_2, \qquad (18)$$

где K_2 - некоторая постоянная, зависящая от ядра $K(t, s)$.

Таким образом, доказано

Теорема 1. Пусть выполнены условия: 1) ядро $K(t,s)$ симметрично, непрерывно в квадрате $0 \leq t,s \leq 1$ и положительно определено; 2) нелинейная функция $M(s,z)$ определена и непрерывна в полосе $-\infty < z < \infty$, $0 \leq s \leq 1$ и удовлетворяет условию Липшица по z; 3) пусть при $u(t) = u_0(t)$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0(t) \in C^{2+\sigma}{}_{[0,1]}$, где $0 < \sigma < 1$; 4) постоянная N_1 удовлетворяет условию $N_1 = K_1(N+1) < 1$.

Тогда: а) при выполнении условий 1), 2), 4) уравнение (2) при любом $u(t) \in C_{[0,1]}$ и любой $\propto > 0$ имеет единственное решение $z_\alpha(t) \in C_{[0,1]}$б) при выполнении условий 1), 2), 3), 4) решение уравнения (2) $z_\alpha^0(t)$ при $u(t) = u_0(t)$ сходится по норме пространства $C_{[0,1]}$ при $\propto \to 0$ к точному решению уравнения (1), причем скорость сходимости удовлетворяет неравенству (18).

Покажем, что решение уравнения (2) является устойчивым от правой части $u(t)$ при согласовании параметра регуляризации α от погрешности правой части δ.

Допустим, что вместо правой точной правой части $u_0(t)$ задана приближенная правая часть $u_\delta(t) \in C_{[0,1]}$C[0,1], удовлетворяющая неравенству

$$\|u_0(t) - u_\delta(t)\| \leq \delta. \tag{19}$$

В силу теоремы 1 уравнение (2) при $u(t) = u_\delta(t)$ имеет единственное решение $z_\alpha^\delta(t) \in C_{[0,1]}$.

Это решение в силу формулы (15) представимо в виде

$$z_\alpha^\delta(t) = (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}u_\delta(t). \tag{20}$$

Оценим разность $z_\alpha^\delta(t) - z_0(t)$ по норме пространства $C_{[0,1]}$

Тогда используя неравенство треугольника для разности $z_\propto^\delta(t) - z_0(t)$ получаем

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} \leq \left\|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} + \|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\|_{C_{[0,1]]}} \tag{21}$$

Вычитая из (20), (15) при $u(t) = u_0(t)$, получаем

$$z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t) = (E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}u_\delta -$$
$$-(E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}(\alpha E + K)^{-1}u_0(t). \tag{22}$$

Далее используя, что нелинейный оператор $(E - (\alpha E + K)^{-1}K(M(s,\cdot) - E))^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $N_1 < 1$, из (22), получаем

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} \leq \frac{1}{1-N_1}\|(\alpha E + K)^{-1}\|\|u_\delta(t) - u_0(t)\|. \tag{23}$$

Далее используя неравенства (7) и (19) из неравенства (23) приходим к неравенству

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\right\|_{C_{[0,1]}} \leq \frac{1}{1-N_1}\frac{\delta C_0}{\alpha^2}. \tag{24}$$

Второе слагаемое в неравенстве (21) удовлетворяет оценке (18).

Из неравенства (21) учитывая неравенства (24) и (18), получаем

$$\left\|z_\alpha^\delta(t) - z_0\ (t)\right\|_{C_{[0,1]}} \leq \frac{C_0}{1-N_1}\frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{K_2}{1-N_1}\alpha^\sigma = \frac{C_0}{1-N_1}\left(\frac{\delta}{\alpha^2} + c_1\alpha^\sigma\right), \tag{25}$$

где $c_1 = \frac{K_2}{C_0}$.

Рассмотрим выражение в скобке в правой части (25) как функцию от α:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\delta}{\alpha^2} + c_1\alpha^\sigma. \tag{26}$$

Эта функция в некоторой точке α_0 имеет минимальное значение, т.е. оценка (25) в этой точке имеет оптимальное значение.

Чтобы найти критическую точку, производную приравниваем к нулю

$$\varphi'(\alpha) = -2\delta\alpha^{-3} + c_1\sigma\alpha^{\sigma-1} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{2\delta}{c_1\sigma}\right)^{\frac{1}{2+\sigma}}. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26) получаем

$$\varphi\big(\alpha(\delta)\big) = \delta^{\frac{\sigma}{2+\sigma}}\, c_3, \qquad (28)$$

где c_3 - некоторая постоянная, зависящая от постоянной c_1, σ.

Таким образом, учитывая (28) из неравенства (25) получаем оценку

$$\left\| z_\alpha^\delta(t) - z_0\ (t) \right\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{C_0}{1-N_1} c_3 \delta^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}. \qquad (29)$$

Доказана

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) функция $u_\delta(t)$ удовлетворяет неравенству (19); 3) параметр регуляризации $\alpha(\delta)$ выбрана по формуле (27).

Тогда решение уравнения (2) при $u(t) = u_\delta(t)$ при $\delta \to 0$ сходится по норме пространства $C_{[0,1]}$ к точному решению (1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (29).

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст]/ Лаврентьев М.М. -Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962г.
2. Саадабаев А. Построение регуляризирующего оператора для решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода [Текст]/ Саадабаев А. -Диссер. на соиск.уч. степени доктора физика-математических наук. Новосибирск 1993г.
3. Усенов И.А. Регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода [Текст]/ Усенов И.А.- Проблемы современной науки и образования, 2016, №3(45), с.30-35.
4. Саадабаев А. Регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода[Текст]/ Саадабаев А., Усенов И.А.- Вестник ОшМУ, 2020, №1-1, с. 147-154.
5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функции и функционального анализа[Текст]/ Колмогоров А.Н., Фомин С.В.- Москва., Наука,1972г.
6. Канторович Л.В. Функциональный анализ [Текст]/ Канторович Л.В., Акилов Г.П. -Москва, Наука, 1972г.