УДК 517.9
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_163

ТРЕХСКОРОСТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ИНТЕРГАЛОМ СТОЛКНОВЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Омуров Таалайбек Дардайылович, д.ф.-м.н., профессор,
Саркелова Жылдыз Жанышевна, ст. преподаватель,
sjjyldyzaa@gmail.com
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В данной статье исследуется многоскоростная сингулярно-возмущенная обратная задача переноса в неограниченной области. В работах [1, 2] и др., множителем интеграла столкновений в обычных задачах переноса было максвелловское распределение или максвелловское распределение умноженное на частоту столкновения. В отличии от указанной задачи, здесь рассматривается нелинейное сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение переноса второго порядка, причем нарушение малости погранслойной функции относительно малого параметра носит нелокальный характер, в чем и заключается актуальность исследования указанной сингулярно-возмущенной обратной задачи.*

Результаты исследуемой сингулярно-возмущенной обратной задачи, получены на основе представления асимптотического характера.

Ключевые слова: *сингулярно-возмущенная обратная задача переноса, уравнение переноса, представление асимптотического характера, вырожденная обратная задача, малый параметр.*

ЧЕКСИЗ АЙМАКТА КАГЫЛЫШУУ ИНГЕРАЛЫ МЕНЕН ЖҮКТӨЛГӨН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ЖЫЛЫШУУ ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ҮЧ ЫЛДАМДЫКТАГЫ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Омуров Таалайбек Дардайылович, ф.-м.и.д., профессор,
Саркелова Жылдыз Жанышевна, ага окутуучу,
sjjyldyzaa@gmail.com
Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университет,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. Бул макалада биз чексиз аймакта көп ылдамдыктагы сингулярдуу козголгон тескери жылышуу маслесин изилдейбиз. [1, 2] жана башка илимий эмгектерде кадимки жылышуу маслеси кагылышуунун интегралдык фактору Максвеллдик бөлүштүрүү же кагылышуу жыштыгына көбөйтүлгөн Максвеллдик бөлүштүрүү болгон.

Көрсөтүлгөн маселеден айырмаланып, бул жерде биз экинчи даражадагы сызыктуу эмес сингулярдуу козголгон интегро-дифференциалдык жылышуу теңдемесин изилдейбиз, ал эми чек ара катмар функциясынын кичинекей параметрге карата аздыгынын бузулушу локалдык эмес болгон үчүн, бул көрсөтүлгөн сингулярдуу козголгон тескери маселени изилдөө актуалдуу болуп саналат.

Изилденген сингулярдуу козголгон тескери маселенин натыйжалары асимптотикалык көрүнүштүн негизинде алынат.

Ачкыч сөздөр: сингулярдуу козголгон тескери жылышуу маселеси, жылышуу теңдеме, асимптотикалык көрсөтүү, тескери маселе, кичинекей параметр.

THREE-VELOCITY INVERSE PROBLEM FOR A LOADED SINGULARLY PERTURBED TRANSPORT EQUATION WITH A COLLISION INTEGRAL IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Omurov Taalaibek Dardaiylovich, Dr Sc, professor,
Sarkelova Zhyldyz Zhanyshevna, teacher,

sjjyldyzaa@gmail.com
Kyrgyz National University J. Balasagyn,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. In this article, we study a multivelocity singularly perturbed inverse transport problem in an unbounded domain. In [1, 2] and others, the factor of the collision integral in conventional transport problems was the Maxwellian distribution or the Maxwellian distribution multiplied by the collision frequency. In contrast to the specified problem, here we consider a nonlinear singularly perturbed integro-differential transfer equation of the second order, and the violation of the smallness of the boundary layer function with respect to a small parameter is non-local, which is the relevance of studying the indicated singularly perturbed inverse problem.

The results of the studied singularly perturbed inverse problem are obtained on the basis of an asymptotic representation.

Key words: singularly perturbed inverse transport problem, transport equation, asymptotic representation, degenerate inverse problem, small parameter.

Рассмотрим трехскоростную коэффициентно-обратную задачу переноса вида:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}U_{\varepsilon}\right)+U^2_{\varepsilon}(t,x,y,z)\right]+\lambda E^{1,1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}U_{\varepsilon}+h_0(x,y,z)U_{\varepsilon}=\\&=Z_{\varepsilon}(x,y,z)f(t)+\varepsilon U_{\varepsilon}(t,x,y,z_0)(KU_{\varepsilon})(t,x,y,z),\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

$$\begin{cases}(U^{(i)}_{\varepsilon t}(t,x,y,z)\,|_{t=0}=V^{(i)}_t(0,x,y,z)+(2a_1x\varepsilon^{-1}+2a_2y\varepsilon^{-1}+2a_2z\varepsilon^{-1})^i\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{\varepsilon}\right),\\ V^{(i)}_t(0,x,y,z)=\varphi_i(x,y,z,),\ (i=0,1),\ \ \forall(x,y,z)\in R^3,\end{cases}\tag{2.4.2}$$

$$\begin{cases}(U^{1,1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)})\,|_{t=T}\equiv(U_{\varepsilon t}+a_1U_{\varepsilon x}+a_2U_{\varepsilon y}+a_3U_{\varepsilon z})\,|_{t=T}=g_0(x,y,z)+g_{\varepsilon}(x,y,z),\\ (V_t+a_1V_x+a_2V_y)_{t=T}=g_0(x,y,z),\ \ \forall(x,y,z)\in R^3,\end{cases}\tag{2.4.3}$$

при этом вводится информация относительно исходных данных в виде:

$$\begin{cases}\|g_{\varepsilon}\|_{L^p(R^3)}=\left(\iint\limits_{R^3}|g_{\varepsilon}(x,y,z)|^p\,dxdydz\right)^{\frac{1}{p}}\le\Delta_1(\varepsilon),\\ \|g_{\varepsilon}(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))\|_{L^p(0,T)}=\\ =\left(\sup\limits_{\bar\Omega_0}\int\limits_0^t|g_{\varepsilon}(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\le\Delta_2(\varepsilon),\\ (\Delta_1,\Delta_2\le\Delta_0(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\to}0),\\ \|U_{\varepsilon}(0,x,y,z)-V(0,x,y,z)\|_{L^p(R^3)}\le\left(\dfrac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}=\gamma_0\varepsilon^{\frac{1}{p}},\\ \mathrm{E}^{1,1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}=\dfrac{\partial}{\partial t}+a_1\dfrac{\partial}{\partial x}+a_2\dfrac{\partial}{\partial y}+a_3\dfrac{\partial}{\partial z},\end{cases}\tag{2.4.4}$$

где $(U_{\varepsilon},Z_{\varepsilon})$ - являются неизвестными функциями. В указанных условиях требуется показать близости решений сингулярно-возмущенной обратной задачи и вырожденной обратной задачи в классе функций $W^p_h(\Omega_0)$, здесь: $0<h_0(x,y,z),\ f(t),\ \varphi_i(x,y,z),\ 0\le K(.),$ $g_0(x,y,z,),\ g_{\varepsilon}(x,y,z),\ 0<a_i,\ \lambda=const,\ (i=\overline{1,3}),\quad 0<\beta<\dfrac{1}{2}$ - являются известными, причем

$$
\begin{cases}
KU_\varepsilon \equiv \int\limits_{R^3} K\left(x,y,z,x',y',z'\right)h\left(x',y',z'\right)U_\varepsilon\left(t,x',y',z'\right)d\Omega, (d\Omega = dxdydz),\\
\int\limits_{R^3} K\left(x,y,z,x',y',z'\right)d\Omega = 1; h_0 \equiv h_1(x)+h_2(y)+h_3(z)+h(x,y,z),\\
0 \le h \le \tilde{h} = const,\ 0 \le h_0 \le \tilde{h}_0 = const,\ \forall (x,y,z)\in R^3,\\
\left(\int\limits_{R^3} h(x,y,z)dxdydz\right)^{\frac{1}{p}} \le \gamma_1 = const; \sup\limits_{[0,T]} |\, f^{(i)}(t)| \le f_0 = const,\ (i=0,1),\\
f(0)=0;\ f(T)\ne 0;\ f(T) - \int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s)\right) f'(s)ds = M_0(T,\lambda,\varepsilon^\beta) \ne 0,\\
\forall \varepsilon \in (0,1), (\varepsilon = 0); 0 < \dfrac{1}{\lambda} = const << 1.
\end{cases} \tag{2.4.5}
$$

1. Известно, что при $\varepsilon = 0$ из коэффициентно-обратной задачи (2.4.1) - (2.4.3) следует:

$$E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}V + \frac{1}{\lambda}h_0(x,y,z)V = \frac{1}{\lambda}\tilde{Z}(x,y,z)f(t), \tag{2.4.6}$$

$$V_t^{(i)}(0,x,y,z) = \varphi_i(x,y,z),\ (i=0,1),\ \forall (x,y,z)\in R^2, \tag{2.4.7}$$

$$\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}V\right)|_{t=T} = g_0(x,y,z),\ \forall (x,y,z)\in R^2, \tag{2.4.8}$$

где задача (2.4.6) - (2.4.8) называется вырожденной обратной задачей переноса, причем $\left(V,\tilde{Z}\right)$– неизвестные функции.

Видно, что из вырожденной обратной задачи в условиях (2.4.5), (2.4.7), (2.4.8) из уравнения (2.4.6) следует система:

$$
\begin{cases}
E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}V + \frac{1}{\lambda}h_0(x,y,z)V = (f(T))^{-1}f(t)\left[g_0(x,y,z) + \frac{1}{\lambda}h_0V\right] \equiv \left(B_0V\right)(t,x,y,z),\\
\tilde{Z}(x,y,z) = (f(T))^{-1}\left[\lambda g_0(x,y,z) + h_0V(t,x,y,z)\right].
\end{cases} \tag{2.4.9}
$$

Следовательно, на основе

$$V = Q(t,x,y,z)\exp\left[\left(\tfrac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{-\infty}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \tfrac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{-\infty}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 + \tfrac{1}{\lambda a_3}\int\limits_{-\infty}^{z} h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right], \tag{2.4.10}$$

с условием

$$Q|_{t=0} = \varphi_0(x,y,z)\exp\left[\tfrac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{-\infty}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \tfrac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{-\infty}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 + \tfrac{1}{\lambda a_3}\int\limits_{-\infty}^{z} h_3(\tau_3)d\tau_3\right] \equiv \tag{2.4.11}$$
$$\equiv \psi_0(x,y,z),\ \forall (x,y,z)\in R^2,$$

из (2.4.6) имеем уравнение вида:

$$E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_2)}Q = \left\{-\frac{1}{\lambda}h(x,y,z)V + (B_0V)(t,x,y,z)\right\}\exp\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{-\infty}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \right. \tag{2.4.12}$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{-\infty}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 + \frac{1}{\lambda a_3}\int\limits_{-\infty}^{z} h_3(\tau_3)d\tau_3\right),$$

т.е. (2.4.11), (2.4.12) - являются задачей Коши относительно функции $Q(t,x,y,z)$. Тогда из (2.4.2) следует:

$$Q=\psi_0(x-a_1t,y-a_2t,z-a_3t)+$$
$$+\int_0^t\left(\exp\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int_{-\infty}^{x-a_1(t-s)}h_1(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{\lambda a_2}\int_{-\infty}^{y-a_2(t-s)}h_2(\tau_2)d\tau_2+\frac{1}{\lambda a_3}\int_{-\infty}^{z-a_3(t-s)}h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right)\times$$
$$\times\left\{-\frac{1}{\lambda}h(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))V(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-\right.$$
$$\left.-a_3(t-s))+(B_0V)(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))\right\}ds. \qquad (2.4.13)$$

Поэтому, подставляя (2.4.13) в (2.4.10), имеем

$$V=\varphi_0(x-a_1t,y-a_2t,z-a_3t)\exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int_{x-a_1t}^{x}h_1(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{\lambda a_2}\int_{y-a_2t}^{y}h_2(\tau_2)d\tau_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\lambda a_3}\int_{z-a_3t}^{z}h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right]+\int_0^t\left(\exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int_{x-a_1(t-s)}^{x}h_1(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{\lambda a_2}\int_{y-a_2(t-s)}^{y}h_2(\tau_2)d\tau_2+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\lambda a_3}\int_{z-a_3(t-s)}^{z}h_3(\tau_3)d\tau_3\right)\right]\right)\left\{-\frac{1}{\lambda}h(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))\times\right. \qquad (2.4.14)$$
$$\times V(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))+(B_0V)\times$$
$$\left.\times(s,x-a_1(t-s),y-a_2(t-s),z-a_3(t-s))\right\}ds\equiv(BV)(t,x,y,z),$$

где (2.4.14) является нагруженным интегральным уравнением второго рода относительно функции $V(t,x,y,z)$. Так как $0<\frac{1}{\lambda}=const<<1$, то оператор B допускает условия принципа Банаха [3], т.е. уравнение (2.4.14) разрешимо в $C(\bar{\Omega}_0)$. А это означает, что функция $V\in C^{1,1,1}(\bar{\Omega}_0)$ является известной. Тогда, с учетом (2.4.9), и функция $\tilde{Z}(x,y,z)$ считается известной. В этом случае предположим, что функции: $(V_t)_t,(V_x)_t,(V_y)_t,(V_z)_t\in L^p(0,T)$ для всех фиксированных $(x,y,z)\in R^2$, т.е.:

$$\begin{cases}\|V_{t^2}\|_{L^p}=\left(\int_0^T|V_{t^2}(t,x,y,z)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\le C_{01},\\ \|V_{tx}\|_{L^p}=\left(\int_0^T|V_{tx}(t,x,y,z)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\le C_{02},\\ \|V_{ty}\|_{L^p}=\left(\int_0^T|V_{ty}(t,x,y,z)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\le C_{03},\\ \|V_{tz}\|_{L^p}=\left(\int_0^T|V_{tz}(t,x,y,z)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\le C_{04},\forall(x,y,z)\in R^2,\\ C_0=\max(C_{01},C_{02},C_{03},C_{04}).\end{cases} \qquad (2.4.15)$$

Лемма 2.4.1. При выполнении условий (2.4.5), (2.4.7), (2.4.8) вырожденное уравнение (2.4.6) разрешимо в $C^{1,1,1}(\bar{\Omega}_0)$, причем допускается условие (2.4.15) для функций

$V_{t^2}, V_{tx}, V_{ty}, V_{tz}$.

2. Далее, чтобы выяснить разрешимость сингулярно-возмущенной обратной задачи переноса, применим представление асимптотического характера, т.е.:

$$\begin{cases} U_\varepsilon(t,x,y,z) = V + \xi_\varepsilon + \exp\left(-\dfrac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2 + (x-a_3t)^2}{\varepsilon}\right), \\ Z_\varepsilon(x,y,z) = \tilde{Z} + \eta_\varepsilon(x,y,z). \end{cases} \tag{2.4.16}$$

Тогда из (2.4.1), с учетом (2.4.6), (2.4.16) вытекает:

$$\varepsilon^\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon\right) + \left[V + \xi_\varepsilon + \exp\left(-\frac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2 + (z-a_3t)^2}{\varepsilon}\right)\right]^2 \right\} +$$
$$+\lambda E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon + h_0(x,y,z)\left(\xi_\varepsilon + \exp\left(-\frac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2 + (z-a_3t)^2}{\varepsilon}\right)\right) = \tag{2.4.17}$$
$$= \eta_\varepsilon(x,y,z)\, f(t) - \varepsilon^\beta\left(V_{t^2} + a_1V_{tx} + a_2V_{ty} + a_3V_{tz}\right),$$

где $\left(V, \tilde{Z}\right)$- решение вырожденной обратной задачи (2.4.6) - (2.4.8), $\left(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon\right)$- остаточные функции, которые содержатся в уравнении (2.4.17) с условиями:

$$\xi_t^{(i)}(t,x,y,z)\,|_{t=0} = 0,\ (i = 0,1), \tag{2.4.18}$$

$$\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon\right)|_{t=T} = g_\varepsilon(x,y,z),\ \ \forall (x,y,z) \in R^2. \tag{2.4.19}$$

Фактически остаточные функции $\left(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon\right)$ определяются из обратной задачи (2.4.17) - (2.4.19), где (2.4.19) является дополнительной информацией для этой задачи. Поэтому, чтобы выяснить разрешимость обратной задачи относительно остаточных функций, сначала, (2.4.17) преобразуем к виду:

$$E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\Big\{-h_0(x,y,z)\xi_\varepsilon(s,x,y,z) + \eta_\varepsilon(x,y,z)\, f(s) -$$
$$-\varepsilon^\beta\left[2\xi_\varepsilon(s,x,y,z)\left(V(s,x,y,z) + \exp\left(-\frac{(x-a_1s)^2 + (y-a_2s)^2 + (z-a_3s)^2}{\varepsilon}\right)\right) + \right. \tag{2.4.20}$$
$$+\xi_\varepsilon^2(s,x,y,z)]\}ds + Y_1(t,x,y,z,\varepsilon) \equiv \left(H_0\xi_\varepsilon\right)(t,x,y,z) + \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right) f(s)ds \times$$
$$\times \eta_\varepsilon(x,y,z) + Y_1(t,x,y,z,\varepsilon),$$

где функция $Y_1(t,x,y,\varepsilon)$ определяется по формуле:

$$\begin{cases} Y_1 \equiv \displaystyle\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\Big\{-\big(V_{s^2}(s,x,y,z) + a_1V_{sx}(s,x,y,z) + a_2V_{sy}(s,x,y,z) + \\ +a_3V_{sz}(s,x,y,z)\big) - \left(V(s,x,y,z) + \exp\left(-\dfrac{(x-a_1s)^2 + (y-a_2s)^2 + (z-a_3s)^2}{\varepsilon}\right)\right)^2\Big\} ds, \\ |Y_1| \le \varepsilon^{\frac{\beta}{q}}\left(C_0 + C_0(a_1+a_2+a_3)\right)\left(\dfrac{1}{\lambda q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(T_0+1\right)^2\dfrac{1}{\lambda}\varepsilon^\beta = \delta_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0;\ \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1, \\ \sup\limits_{\bar{\Omega}_0}|V| \le T_0. \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Из уравнения (2.4.20), на основе (2.4.19) следует уравнение:

$$\eta_\varepsilon(x,y,z) = M_0^{-1}(T,\lambda,\varepsilon^\beta)\left\{g_\varepsilon(x,y,z) - Y_1(T,x,y,z,\varepsilon) + \left(H_0\xi_\varepsilon\right)\left(T,x,y,z\right)\right\}. \tag{2.4.22}$$

Следовательно, подставляя (2.4.22) в (2.4.20) получим:

$$\begin{gathered} E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon = -\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(t,x,y,z) + \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right) f(s)ds \times \\ \times M_0^{-1}\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T,x,y,z) + Y_2(t,x,y,z,\varepsilon), \end{gathered} \tag{2.4.23}$$

где

$$Y_2 \equiv Y_1 + \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right) f(s)ds \times M_0^{-1}\left\{g_\varepsilon(x,y,z) - Y_1(T,x,y,z,\varepsilon)\right\}. \tag{2.4.24}$$

Поэтому, с учетом (2.4.18) из (2.4.23) имеем:

$$\begin{gathered} \xi_\varepsilon(t,x,y,z) = \int_0^t \Big\{-\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(s, x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s)) + \\ + \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right) f(s')ds' \times M_0^{-1}\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T, x-a_1(t-s), y-a_2(t- \\ -s), z-a_3(t-s))\Big\} ds + Y(t,x,y,z,\varepsilon) \equiv (P\xi_\varepsilon)(t,x,y,z), \end{gathered} \tag{2.4.25}$$

здесь

$$\begin{cases} Y \equiv \int_0^t \Big\{Y_1(s, x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s), \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right) f(s')ds' \times \\ \times M_0^{-1}\left[g_\varepsilon(x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s)) - Y_1(T, x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s), \varepsilon)\right]\Big\} ds, \\ |Y| \le \delta_1(\varepsilon)\left(T + |M_0^{-1}| f_0 \frac{1}{\lambda}\right) + |M_0^{-1}| f_0 \frac{1}{\lambda}\int_0^t |g_\varepsilon(x-a_1(t-s), y-a_2(t-s), z-a_3(t-s))| ds \le \\ \le \gamma_2\delta_1(\varepsilon) + \gamma_3\left(\int_0^t |g_\varepsilon|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} \le \gamma_2\delta_1(\varepsilon) + \gamma_3\Delta_0(\varepsilon) = \delta_2(\varepsilon), \gamma_2 = T + |M_0^{-1}| f_0 \frac{1}{\lambda};\ \gamma_3 = |M_0^{-1}| f_0 \frac{1}{\lambda}(T)^{\frac{1}{q}}. \end{cases} \tag{2.4.26}$$

Лемма 2.4.2. В условиях леммы 2.4.1 и системы

$$\begin{cases} L_P < 1, \\ P: S_{r_0} \to S_{r_0},\ \left(S_{r_0} = \left\{\xi_\varepsilon : |\xi_\varepsilon| \le r_0 = const, \forall (t,x,y,z) \in \bar{\Omega}_0\right\}\right), \end{cases} \tag{2.4.27}$$

уравнение (2.4.25) разрешимо в $C\left(\bar{\Omega}_0\right)$, причем

$$\|\xi_\varepsilon\|_C \le \left(1 - L_p\right)^{-1}\delta_2(\varepsilon). \tag{2.4.28}$$

Следовательно, на основе (2.4.22) имеет место:

$$\begin{cases} \|\eta_\varepsilon(x,y,z)\|_{L^p_h(R^2)} \le |M_0^{-1}| \left(\tilde{h}\right)^{\frac{1}{p}}\Delta_0(\varepsilon) + |M_0^{-1}|\delta_0(\varepsilon)\gamma_1 + \gamma_1 |M_0^{-1}|\gamma_4(1-L_p)^{-1} \times \\ \times\delta_2(\varepsilon) = \delta_3(\varepsilon), \\ \frac{1}{\lambda}\left(\tilde{h}_0 + 2(T_0+1) + (1-L_p)^{-1}\delta_2(\varepsilon)\right) \le \gamma_4, \\ \|Z_\varepsilon - \tilde{Z}\|_{L^p_h(R^2)} = \|\eta_\varepsilon\|_{L^p_h(R^2)}. \end{cases} \tag{2.4.29}$$

В самом деле, результаты леммы 2.4.2 очевидны, так как при выполнении (2.4.27) для оператора P реализуются условия принципа Банаха, а это означает, что уравнение (2.4.25) имеет единственное и непрерывное решение в $C(\overline{\Omega}_0)$. Тогда, с учетом (2.4.22) имеем оценку вида (2.4.29). ЧиТД.

Так как относительно всех слагаемых функций (2.4.16) выполняются выводы лемм 2.4.1, 2.4.2, и на основе (2.4.16) следует оценка вида:

$$|U_\varepsilon - V| \le \|\xi_\varepsilon\|_C + \exp\left(-\frac{(x-a_1t)^2+(y-a_2t)^2+(z-a_3t)^2}{\varepsilon}\right). \tag{2.4.30}$$

Поэтому, учитывая условия лемм 2.4.1; 2.4.2 и оценивая (2.4.30) в смысле нормы $L_h^p(\Omega_0)$, получим:

$$\|U_\varepsilon - V\|_{L_h^p} \le (1-L_p)^{-1}\delta_2(\varepsilon)\gamma_1(T)^{\frac{1}{p}} + (\tilde{h}T)^{\frac{1}{p}}\gamma_0\varepsilon^{\frac{1}{p}} = \delta_4(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0. \tag{2.4.31}$$

Далее, рассматривая совокупности результатов (2.4.29) и (2.4.31), и учитывая

$\psi = \left(U_\varepsilon - V;\, Z_\varepsilon - \tilde{Z}\right)$,

имеем оценку:

$$\begin{cases} W_h^p(\Omega_0) = \left\{(t,x,y,z)\in\Omega_0 : \psi_1(t,x,y,z)\in L_h^p(\Omega_0),\, \psi_2(x,y,z)\in L_h^p(R^2)\right\}, \\ \|\psi\|_{W_h^p(\Omega_0)} = \|U_\varepsilon - V\|_{L_h^p(\Omega_0)} + \|Z-\tilde{Z}\|_{L_h^p(R^2)} \le \delta_\varepsilon(\varepsilon) + \delta_4(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0. \end{cases} \tag{2.4.32}$$

Теорема 2.4.1. В условиях лемм 2.4.1, 2.4.2 и (2.4.32) сингулярно-возмущенная обратная задача (2.4.1) - (2.4.4) имеет единственное решение по правилу (2.4.16), причем допустимая погрешность между решениями сингулярно-возмущенной обратной задачи и вырожденной обратной задачи в $W_h^p(\Omega_0)$ будет порядка $\Delta(\varepsilon)$.

Литература

1. Омуров Т.Д. Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса[Текст]/ Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев. – Бишкек: Илим, 2010. – 116 с.

2. Туганбаев М.М. Прямые и обратные задачи для многоскоростных уравнений типа [Текст]/ Каца – Больцмана/ М.М. Туганбаев. – Бишкек, 2011. – 122 с.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ [Текст]/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 196 с.