УДК 519.63
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_153

АНАЛИЗ БИГАРМОНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ИТЕРАЦИОННЫХ РАСШИРЕНИЙ

Мельцайкин Евгений Андреевич,
e.meltsaykin@gmail.com
Ушаков Андрей Леонидович
ushakoval@susu.ru
Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск, Российская Федерация

Аннотация. *В статье приводится описание анализа бигармонических моделей методами итерационных расширений. Различные стационарные физические системы в механике моделируются с помощью краевых задач для неоднородных уравнений Софи Жермен. Используя бигармоническую модель, т.е. краевую задачу для неоднородного уравнения Софи Жермен, описывают прогибание пластин, потоки при течениях жидкостей. С помощью разработанных методов итерационных расширений получаются эффективные алгоритмы решения рассматриваемых задач.*

Ключевые слова: *бигармонические модели; методы итерационных расширений.*

ANALYSIS OF BIHARMONIC AND HARMONIC MODELS BY THE METHODS OF ITERATIVE EXTENSIONS

Meltsaykin Evgeniy Andreevich,
e.meltsaykin@gmail.com
Ushakov Andrey Leonidovich
ushakoval@susu.ru
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. *The article describes the analysis of biharmonic models by iterative extension methods. Various stationary physical systems in mechanics are modeled using boundary value problems for inhomogeneous Sophie Germain. Using the biharmonic model, i.e. boundary value problem for the inhomogeneous Sophie Germain equation, describe the deflection of plates, flows during fluid flows. With the help of the developed methods of iterative extensions, efficient algorithms for solving the problems under consideration are obtained.*

Key words: *biharmonic models; methods of iterative extensions.*

Введение

Рассматривается бигармоническая модель, т.е. смешанную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в ограниченной области на плоскости $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta^2 \breve{u} = \breve{f} \tag{1}$$

с краевыми условиями четырех типов

$$\breve{u} = \frac{\partial \breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \breve{u} = l_1\breve{u}\Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial n} = l_1\breve{u}\Big|_{\Gamma_2} = 0, l_1\breve{u} = l_2\breve{u}\Big|_{\Gamma_3} = 0,$$

где

$$\partial\Omega = \bar{s}, s = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Gamma_i \cup \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 0,1,2,3,$$

$$l_1\breve{u} = \Delta\breve{u} + (1-\sigma)n_1 n_2 \breve{u}_{xy} - n_2^2\breve{u}_{xx} - n_1^2\breve{u}_{yy},$$

$$l_2\breve{u} = \frac{\partial \Delta\breve{u}}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left(n_1 n_2(\breve{u}_{yy} - \breve{u}_{xx}) + (n_1^2 - n_2^2)\breve{u}_{xy}\right),$$

$$n_1 = -\cos(n,x)\,, n_2 = -\cos(n,y)\,, \sigma \in (0;1).$$

Бигармоническую модель можно сформулировать как скалярную модель, задачу представления функционала в форме скалярного произведения

$$\breve{u} \in \breve{H}: [\breve{u}, \breve{v}] = F(\breve{v}) \forall \breve{v} \in \breve{H}, F \in \breve{H}', \tag{2}$$

где соболевское пространство

$$\breve{H} = \breve{H}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Omega) : \breve{v} \Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\},$$

билинейная форма, скалярное произведение

$$[\breve{u}, \breve{v}] = \Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \int_\Omega (\sigma \Delta \breve{u} \Delta \breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy})) d\Omega, \sigma \in (0;1),$$

если $\breve{f}$ – заданная функция, то функционал

$$F(\breve{v}) = (\breve{u}, \breve{v}) = \int_\Omega \breve{f} v d\Omega.$$

Для задачи (2) следующее предположение обеспечивает существование и единственность ее решения [1, 4]

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1 ||\breve{v}||^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2 ||\breve{v}||^2_{W_2^2(\Omega)} \forall \breve{v} \in \breve{H}.$$

Такие задачи в рамках изучаемого направления методы фиктивной области исследовали, например, А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих [3], С.Б. Сорокин [5], Г.И. Марчук, Ю.А. Кузнецов, А.М. Мацокин [2] и др. При решении приведенных задач имеются проблемы. Перспективное направление методы фиктивной области по решению этих задач также имеет проблемы. Будем, использовать, что, если задачи, рассматриваемые как системы аналогичны, то они имеют аналогичные свойства, а методы решения этих задач будут также аналогичны между собой. Для разработки новых эффективных методов будем применять обобщения метода фиктивной области, т.е. методы итерационных расширений. В методе фиктивной области на примере механики увеличиваем реакцию опоры и жесткость материала на фиктивном продолжении, т.е. дополнительно используем выбор двух параметров. Минимизируем ошибку в норме более сильной, чем энергетическая норма возникающей задачи. Применяем метод минимальных невязок с указанием условий достаточных для его сходимости. При этом новом подходе относительные ошибки предлагаемых итерационных процессов мажорируются бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями. Основной целью описываемых работ являлась разработка асимптотически оптимальных методов решения приведенных задач [6–9].

1. Анализ бигармонической модели

1.1. Бигармоническая модель

Приведем решаемую задачу при $\omega = 1$ и фиктивную задачу при $\omega = II$

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega: \Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega) \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, F_\omega \in \breve{H}'_\omega \tag{3}$$

где используем Соболевские пространства

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \breve{v}_\omega \in W_2^2(\Omega_\omega) : \breve{v}_\omega \Big|_{\Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,1}} = 0, \frac{\partial \breve{v}_\omega}{\partial n_\omega} \Big|_{\Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,2}} = 0 \right\}$$

на ограниченных областях $\Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2$ с границами

$$\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega, s_\omega = \Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2} \cup \Gamma_{\omega,3},$$

$$\Gamma_{\omega,i} \cap \Gamma_{\omega,j} = \emptyset, \text{ если } i \neq j, i,j = 0,1,2,3,$$

n_ω – внешние нормали у $\partial\Omega_\omega$, билинейные формы при $\breve{a}_\omega \in [0; +\infty), \sigma_\omega \in (0;1)$

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} (\sigma_\omega \Delta\breve{u}_\omega \Delta\breve{v}_\omega + (1-\sigma_\omega)(\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} + \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy}))d\Omega_\omega.$$

У каждой из задач в (3) существует и единственное решение при выполнении предположений [1, 4]

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1 \left\| \breve{v}_\omega \right\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \le \Lambda_\omega(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \le c_2 \left\| \breve{v}_\omega \right\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

Если $\breve{f}_\omega$ – заданная функция, то

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega.$$

В решаемой задаче при $\omega = 1, a_1 = 0, \Gamma_{1,0} \ne \emptyset$. В фиктивной задаче при $\omega = II, \breve{f}_{II} = 0, \breve{u}_{II} = 0$.

1.2. Продолженная бигармоническая модель и ее аналитическое исследование

Приведем продолженную задачу

$$\breve{u} \in \breve{V}: \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{II}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v}) \forall \breve{v} \in \breve{V}, \qquad (4)$$

где используем расширенное пространство решений

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Pi): \breve{v} \Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\}.$$

Полагаем, что область решения у исходной задачи дополняется до прямоугольника

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_{II} = \overline{\Pi}, \Omega_1 \cup \Omega_{II} = \emptyset, \Omega_1, \Omega_{II} \subset \mathbb{R}^2,$$

граница у прямоугольной области

$$\partial\Pi = \bar{s}, s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

Считаем, что границы первой области и второй области пересекаются

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{II} = \bar{S}, S = \Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{II,3} \ne \emptyset,$$

n – внешняя нормаль у $\partial\Pi$. Подпространство решений продолженной задачи

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V}: \breve{v}_1 \Big|_{\Pi \backslash \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В формулировке продолженной задачи применяем оператор проектирования

$$I_1: \breve{V} \to \breve{V}_1, \breve{V}_1 = im I_1, I_1 = I_1^2.$$

Введем подпространства

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \left\{ \breve{v}_3 \in \breve{V}: \breve{v}_3 \Big|_{\Pi \backslash \Omega_{II}} = 0 \right\}, \breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_3,$$

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \left\{ \breve{v}_2 \in \breve{V}: \Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_0) = 0, \forall\, \breve{v}_0 \in \breve{V}_0 \right\},$$

$$\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{II}, \breve{V}_1 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2, \breve{V}_{II} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3$$

Прямые суммы рассматриваются, используя скалярное произведение, порождаемое билинейной формой

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_{\text{II}}(\breve{u}, \breve{v}) \;\forall\, \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Предполагается, что билинейная форма такова, что

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1 \left\| \breve{v} \right\|^2_{W_2^2(\Pi)} \le \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \le c_2 \left\| \breve{v} \right\|^2_{W_2^2(\Pi)} \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Используем положение о возможности продолжения функций

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0; 1], \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1; 1]: \breve{\beta}_1 \Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \le \Lambda_{\text{II}}(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \le \breve{\beta}_2 \Lambda(\breve{v}_2, \breve{v}_2) \;\forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Заметим, что

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \breve{V}_\omega(\Omega_\omega), \omega \in \{1, \Pi\}.$$

Исследование продолженной бигармонической модели проводится модифицированным методом фиктивных компонент [6, 7, 9]:

$$\breve{u}^k \in \breve{V}: \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}\Big(\Lambda_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1, \breve{v})\Big)$$

$$\forall \breve{v} \in \breve{V}, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \tau = \tfrac{2}{\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2}, k \in N \setminus \{1\}, \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1 \subset \breve{V} \qquad (5)$$

Введем норму

$$||\breve{v}||_{\breve{V}} = \sqrt{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}.$$

Теорема 1. *Выполняются оценки сходимости*

$$\Big||\breve{u}^k - \breve{u}|\Big|_{\breve{V}} \le \varepsilon\big||\breve{u}^0 - \breve{u}|\big|_{\breve{V}}, k \in N,$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1}, \delta_1 = \sqrt{||I_1||_{\breve{V}}^2 - 1}, 0 \le q = \frac{(\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)}{\breve{\beta}_2 + \breve{\beta}_1} < 1.$$

1.3. Продолженная бигармоническая модель при дискретизации и ее численный анализ

Проведем дискретизацию продолженной модели, когда

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2), \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{b_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{0\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{0\}, b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

Введем сетку

$$(x_i; y_j) = \big((i - 1{,}5)h_1; (j - 1{,}5)h_2\big),$$

$$h_1 = \frac{b_1}{m - 1{,}5}, h_2 = \frac{b_2}{n - 1{,}5}, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n, m - 2, n - 2 \in N.$$

Рассматриваем сеточные функции в узлах сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2 \dots, m,\ j = 1,2 \dots, n,\ m - 2, n - 2 \in \mathbb{N}.$$

Используем восполнение для сеточных функций

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 2, \dots, m-1,\ j = 2, \dots, n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i]\Psi(x/h_1 - i + 4) + \Psi(x/h_1 - i + 3) - [(i+1)/m]\Psi(x/h_1 - i + 1),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j]\Psi(y/h_2 - j + 4) + \Psi(y/h_2 - j + 3) + [(j+1)/n]\Psi(y/h_2 - j + 1),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0{,}5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1{,}5, & z \in [1;2], \\ 0{,}5z^2 - 3z - 4{,}5, & z \in [2;3], \\ 0, & z \notin (0;3). \end{cases}$$

Определяем, что базисные функции вне прямоугольника равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x; y) = 0,\ (x; y) \notin \Pi,\ i = 2 \dots, m-1,\ j = 2 \dots, n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Линейные комбинации из базисных функций дают конечномерное подпространство в расширенном пространстве

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) \right\} \subset \breve{V}.$$

Рассмотрим продолженную модель в матричной форме

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : \ B\overline{u} = \overline{f}, \ \overline{f} \in \mathbb{R}^N, \tag{6}$$

полагая, что оператор проектирования зануляет коэффициенты при базисных функциях носители, у которых не лежат целиком в первой области, а продолженная матрица и продолженная правая часть у системы определяются равенствами

$$\left\langle B\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \ \left\langle \overline{f}, \overline{v} \right\rangle = F_1(I_1\tilde{v}) \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \overline{f}, \overline{v} \right\rangle = (\overline{f}, \overline{v}) h_1 h_2 = \overline{f}\,\overline{v} h_1 h_2, \ \overline{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)' \in \mathbb{R}^N, N = (m-2)(n-2).$$

При этом занумеруем первыми коэффициенты при базисных функциях с носителями, целиком лежащими внутри первой области. Далее занумеруем коэффициенты при базисных функциях носители, которых пересекают границу и первой, и второй области. Закончим нумерацию на коэффициентах при базисных функциях с носителями, целиком лежащими внутри второй области. Тогда векторы имеют следующую структуру

$$\overline{v} = (\overline{v}_1', \overline{v}_2', \overline{v}_3')', \ \overline{u} = (\overline{u}_1', \overline{0}', \overline{0}')', \ \ \overline{f} = (\overline{f}_1', \overline{0}', \overline{0}')'.$$

Матрица имеют структуру

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы

$$\left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \ \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\overline{u}, \overline{v} \right\rangle = \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Матрицы имеют структуру

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Зададим расширенную матрицу

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Введем соответствующие подпространства

$$\overline{V}_1 = \left\{ \overline{v} = (\overline{v}_1', \overline{v}_2', \overline{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \overline{v}_2 = \overline{0}, \ \overline{v}_3 = \overline{0} \right\},$$

$$\overline{V}_3 = \left\{ \overline{v} = (\overline{v}_1', \overline{v}_2', \overline{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \overline{v}_1 = \overline{0}, \ \overline{v}_2 = \overline{0} \right\}, \ \overline{V}_0 = \overline{V}_1 \oplus \overline{V}_3,$$

$$\bar V_2=\left\{\bar v=(\bar v_1{}',\bar v_2{}',\bar v_3{}')'\in\mathbb{R}^N:\Lambda_{11}\bar v_1+\Lambda_{12}\bar v_2=\bar 0,\ \Lambda_{32}\bar v_2+\Lambda_{33}\bar v_3=\bar 0\right\}.$$

Имеют место разложения

$$\mathbb{R}^N=\bar V_1\oplus\bar V_2\oplus\bar V_3=\bar V_1\oplus\bar V_{\mathrm{II}},\ \bar V_{\mathrm{I}}=\bar V_1\oplus\bar V_2,\ \bar V_{\mathrm{II}}=\bar V_2\oplus\bar V_3.$$

Приведем предположения о продолжении в матричной форме

$$\exists\beta_1\in(0;+\infty),\ \beta_2\in[\beta_1;+\infty):\beta_1\left\langle\Lambda\bar v_2,\bar v_2\right\rangle\le\left\langle\Lambda_{\mathrm{II}}\bar v_2,\bar v_2\right\rangle\le\beta_2\Lambda\left\langle\Lambda\bar v_2,\bar v_2\right\rangle\ \forall\bar v_2\in\bar V_2.$$

Продолженная бигармоническая модель в матричной форме

$$B\bar u=\bar f,\begin{bmatrix}\Lambda_{11}&\Lambda_{12}&0\\0&\Lambda_{02}&\Lambda_{23}\\0&\Lambda_{32}&\Lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar u_1\\\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar f_1\\\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix}.$$

Исходная задача в матричной форме, фиктивная задача в матричной форме

$$\Lambda_{11}\bar u_1=\bar f_1,\begin{bmatrix}\Lambda_{02}&\Lambda_{23}\\\Lambda_{32}&\Lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar u_2\\\bar u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar u_2\\\bar u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix}.$$

При исследовании продолженной бигармонической модели в матричной форме, зададим расширенную матрицу по-новому

$$C=\Lambda_{\mathrm{I}}+\gamma\Lambda_{\mathrm{II}},\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\0&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_{11}&\Lambda_{12}&0\\\Lambda_{21}&\Lambda_{20}&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\Lambda_{02}&\Lambda_{23}\\0&\Lambda_{32}&\Lambda_{33}\end{bmatrix},\gamma\in(0;+\infty).$$

Используем выполнение положений о продолжении функций следующей форме

$$\exists\gamma_1\in(0;+\infty),\ \gamma_2\in[\gamma_1;+\infty):\gamma_1^2\left\langle C\bar v_2,C\bar v_2\right\rangle\le\left\langle\Lambda\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar v_2,\Lambda_{\mathrm{II}}\bar v_2\right\rangle\le\gamma_2^2\left\langle C\bar v_2,C\bar v_2\right\rangle\ \forall\bar v_2\in\bar V_2,$$

$$\exists\alpha\in(0;+\infty):\left\langle\Lambda_{\mathrm{I}}\bar v_2,\Lambda_{\mathrm{I}}\bar v_2\right\rangle\le\alpha^2\left\langle\Lambda_{\mathrm{II}}\bar v_2,\Lambda_{\mathrm{II}}\bar v_2\right\rangle\ \forall\bar v_2\in\bar V_2.$$

Для решения задачи (6) как обобщение модифицированного метода фиктивных компонент применим метод итерационных расширений [8, 9]:

$$\bar u^k\in\mathbb{R}^N:\ C(\bar u^k-\bar u^{k-1})=-\tau_{k-1}(B\bar u^{k-1}-\bar f),\ k\in\mathbb{N},\tag{7}$$

$$\forall\bar u^0\in\bar V_1,\ \gamma>\alpha,\ \tau_0=1,\ \tau_{k-1}=\left\langle\bar r^{k-1},\bar\eta^{k-1}\right\rangle\Big/\left\langle\bar\eta^{k-1},\bar\eta^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

где соответственно вычисляются невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\bar r^{k-1}=B\bar u^{k-1}-\bar f,\ \bar w^{k-1}=C^{-1}\bar r^{k-1},\ \bar\eta^{k-1}=B\bar w^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Определим норму

$$\|\bar v\|_{C^2}=\sqrt{\left\langle C^2\bar v,\bar v\right\rangle}\ \ \forall\bar v\in\mathbb{R}^N.$$

Теорема 2. *Для процесса (7) выполняется такая оценка*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{C^2} \le \varepsilon \left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Приведем алгоритмическую реализацию метода итерационных расширений для бигармонической модели. Используем метод минимальных невязок для решения задачи (6).

I. Начальное приближение, итерационный параметр

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \tau_0 = 1.$$

II. Невязка

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ k \in \mathbb{N}.$$

III. Квадрат нормы абсолютной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

IV. Поправка

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

V. Эквивалентная невязка

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Очередное приближение

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Критерий остановки итераций

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}_0 \mathrm{E}^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

Литература

1. Aubin, J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems[Text] / Aubin J.-P. //New York: Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.
2. Marchuk, G.I. Fictitious Domain and Domain Decomposion Methods. Russian Journal Numerical Analysis and MathematicalModelling, [Text] / Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A., Matsokin A.M. // 1986, vol. 1, № 1. P. 3–35.
3. Matsokin, A.M. The Fictitious-Domain Method and Explicit Continuation Operators. Computational Mathematics and Mathematical Physics[Text] / Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V.// 1993, vol. 33, № 1. P. 52–68.
4. Oganesyan, L.A. Variation-Difference Methods for solving Elliptic Equations. Erevan[Text] /, Izd-vo AN ArmSSR, 1979. – 235 p.
5. Sorokin, S.B. Analytical Solution of Generalized Spectral Problem in the Method of Recalculating Boundary Conditions for a Biharmonic Equation[Text] / Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. // Siberian Journal Numerical Mathematics, 2013, vol. 16, № 3. P. 267–274.
6. Ushakov, A.L. About Modeelling of Deformations of Plates[Text] / Ushakov A.L.// Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2015, vol. 8, № 2. P. 138–142.

7. Ushakov, A.L. Investigation of a Mixed Boundary Value Proble for the Poisson Equation[Text] / Ushakov A.L. // 2020. – Proceedings – 2020 International Russian Automation Conference, RusAutoCon 2020, article ID 9208198, P 273–278.

8. Ushakov, A.L. Numerical Anallysis of the Mixed Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equation. [Text] / Ushakov A.L. // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2021, vol. 8, № 1. P. 46–59.

9. Ushakov, A.L. Analysis of the Mixed Boundary Value Problem for the Poisson's Equation[Text] / Ushakov A.L.// Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics, 2021, vol. 13, № 1. P. 29–40.