УДК 517.9
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_134

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

Манакова Наталья Александровна, д.ф.-м.н., профессор,
manakovana@susu.ru
Николаева Надежда Геннадьевна, магистрант,
nikolaevang23@yandex.ru
Гаврилова Ольга Витальевна, к.ф.-м.н.,
gavrilovaov@susu.ru
Перевозчикова Ксения Владимировна, ст.преподаватель,
perevozchikovakv@susu.ru
Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск, Российская Федерация

Аннотация. *Работа посвящена численному исследованию вопроса единственности решения задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Хоффа на отрезке. Уравнение Хоффа моделирует динамику деформации двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Для исследования вопроса (не)единственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова будет использован метод фазового пространства, который был разработан Г.А. Свиридюком при исследовании разрешимости уравнений соболевского типа. Ранее было показано, что фазовое пространство исследуемой модели содержит особенности типа 2-сборки Уитни, что влечет за собой возможную неединственность решений. Представлены условия единственности или множественности решений задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле в зависимости от параметров системы, построен алгоритм численного решения задачи на основе метода Галеркина и представлены вычислительные эксперименты.*

Ключевые слова: *уравнения соболевского типа; задача Шоуолтера – Сидорова; уравнение Хоффа; неединственность решений; метод фазового пространства; метод Галеркина.*

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE NON-UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE SHOWALTER-SIDOROV PROBLEM FOR A MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF AN I-BEAM

Natalia A. Manakova, Dr.Sc.,professor,
manakovana@susu.ru
Nadezhda G. Nikolaeva, undergraduate student
nikolaevang23@yandex.ru
Olga V. Gavrilova, Cand. Sc.
gavrilovaov@susu.ru
Ksenia V. Perevozchikova, lecturer,
perevozchikovakv@susu.ru
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. *The paper is devoted to the study of the uniqueness of the solution of the Showalter–Sidorov–Dirichlet problem for the Hoff equation on a segment. The Hoff equation simulates the dynamics of deformation of an I-beam under constant load. To investigate the question of the (non)uniqueness of solutions to the Showalter–Sidorov problem, the phase space method will be used, which was developed by G.A. Sviridyuk in the study of the solvability of Sobolev-type equations. It was previously shown that the phase space of the model under study contains features of type 2-Whitney assembly, which entails a possible non-uniqueness of solutions. The conditions of uniqueness or multiplicity of solutions of the Showalter–Sidorov–Dirichlet problem depending on the system parameters are presented, an algorithm for numerical solution of the problem based on the Galerkin method is constructed and computational experiments are presented.*

Key words*: Sobolev type equations; Showalter–Sidorov problem; the Hoff equation; nonuniqueness of solutions; phase space method; the Galerkin method.*

1. Введение

Подход, предложенный в работе Хоффа [1], для изучения деформации при сжатии (выпучивание) стержня распространяется на случай ползучести начальных неправильностей. Под ползучестью следует понимать деформацию твердого тела, проходящую с течением длительного времени, под действием постоянной нагрузки. Математическая модель деформации двутавровой балки принадлежит к классу полулинейных вырожденных моделей и будет исследована в рамках абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа. В обзорной статье [2] собраны результаты многолетних исследований вопроса (не)единственности задачи Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(x,0)-u_0(x))=0 \tag{1}$$

для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}=Mu+N(u), \ker L\neq\{0\}, \tag{2}$$

приведены примеры математических моделей, у которых возможно существование нескольких решений задачи Шоуолтера – Сидорова. Вопросы (не)единственности решений уравнений и систем уравнений, сводящихся к полулинейным уравнениям вида (2) и связи неединственности решений с существованием в фазовом пространстве уравнений (2) сборок и складок Уитни были освещены в следующих работах: А.Ф. Гильмутдиновой для математической модели Плотникова были выявлены условия существования неединственности решения задачи [3], Т.А. Бокаревой и Г.А. Свиридюком для модели распространения нервного импульса в мембране и для модели автокаталитической реакции с диффузией показано существование 2-сборки Уитни и 1-сборки Уитни соответственно [4], Н.А. Манаковой и О.В. Гавриловой для модели распространения нервного импульса в мембране были выявлены условия существования неединственности решения задачи [5].
В данной работе будем рассматривать задачу Шоуолтера – Сидорова

$$\lambda(u(x,0)-u_0(x))+(u_{xx}(x,0)-u_0(x))=0,\ x\in(0,l), \tag{3}$$

для уравнение Хоффа

$$\lambda u_t+u_{xxt}=\alpha u+\beta u^3,\ t\in(0,T), \tag{4}$$

с условием Дирихле

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ x\in(0,l), t\in(0,T). \tag{5}$$

Требуется найти условия неединственности решений задачи (3) – (5) в зависимости от значений параметров задачи, построить алгоритм численного решения задачи (3) – (5) с учетом (не)единственности решения в случае $\alpha\beta<0$.
В работе [6] Г.А. Свиридюком и В.О. Казаком было показано, что фазовое пространство уравнения (4) является простым банаховым C^∞-многообразием в случае $\alpha\beta>0$. В случае $\alpha\beta<0$ фазовое пространство уравнения (4) уже не будет простым многообразием, – оно лежит на 2–сборке Уитни как показано в статье [7]. В данной работе для реализации численного решения задачи используется метод Галеркина. Впервые для полулинейных уравнений соболевского типа этот метод был применен Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой [8]. В случае вырожденных полулинейных уравнений для нахождения приближенных решений, метод Галеркина был использован в работах [9–13].

2. Особенности фазового пространства

Редуцируем задачу (3) – (5) к задаче (1), (2). Для этого положим $\mathfrak{U}=L_4(0,l)$, $\mathfrak{h}=\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$. Операторы L,M,N определим формулами

$$\langle Lu,v\rangle = \int_0^l (\lambda uv - u_x v_x)dx,\ \ \forall u,v \in \mathfrak{h},$$
$$\langle Mu,v\rangle = \alpha \int_0^l uv\, dx,\ \ \forall u,v \in \mathfrak{h}, \quad (6)$$
$$\langle N(u),v\rangle = \beta \int_0^l u^3 v dx,\ \ \forall u,v \in \mathfrak{U},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(0,l)$.

Пусть параметр $\lambda \in \sigma(-\Delta)$, тогда $\ker L = span\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$, $im\ L = (\ker L)^{\perp}$, где $\{\varphi_g\}$ – ортонормированное (в смысле $L_2(0,l)$) семейство собственных функций однородной задачи Дирихле на интервале $(0,l)$ для оператора Лапласа $(-\Delta)$, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_g\}$, которые занумерованы по невозрастанию. При этом φ_g, λ_g примут вид

$$\varphi_g = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin gx\ ,\ \lambda_g = g^2,\ g = 1,2,\dots$$

Зададим множество $\mathfrak{B}$ следующим образом:

$$\mathfrak{B} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \varphi_k\rangle = 0, \lambda = \lambda_k\}.$$

Считая, что $\alpha\beta < 0$ и $\lambda = \lambda_k$ представим вектор u в виде $u = s_k\varphi_k + u_k^{\perp}$, где $u_k^{\perp} \in \mathfrak{U}_{\mathrm{k}}^{\perp} = \{u_k \in \mathfrak{U} : \langle u_{\mathrm{k}}, \varphi_k\rangle = 0\}$, заметим, что множество $\mathfrak{B}$ C^{∞}-диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{B} = \{(s_{\mathrm{k}}, u_{\mathrm{k}}^{\perp}) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U} : s_{\mathrm{k}}^3 \parallel \varphi_{\mathrm{k}} \parallel_{\mathfrak{U}}^4 + 3s_{\mathrm{k}}^2 \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^3 u_{\mathrm{k}}^{\perp}\ dx +$$
$$+\ s_{\mathrm{k}}\ (3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^2 (u_{\mathrm{k}}^{\perp})^2\ dx + \alpha\beta^{-1} + \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}} \big(u_{\mathrm{k}}^{\perp}\big)^3\ dx = 0\}. \quad (7)$$

В [7] множество $\mathfrak{B}$ названо 2-сборкой Уитни, в [6] показано, что в случае $\alpha\beta > 0$ при любом векторе $u_k^{\perp} \in \mathfrak{U}_k^{\perp}$ существует точно одно число $s_k \in \mathbb{R}$ такое, что $s_{\mathrm{k}}\varphi_k + u_k^{\perp} \in \mathfrak{B}$. Уравнение, определяющее множество $\mathfrak{B}$, является кубическим уравнением общего вида

$$as_{\mathrm{k}}^3 + bs_{\mathrm{k}}^2 + cs_{\mathrm{k}} + d = 0. \quad (8)$$

Согласно формулам Кардано, любое кубическое уравнение общего вида при помощи замены $s_k = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к канонической форме $y^3 + py + q = 0$ с коэффициентами

$$a = \parallel \varphi_{\mathrm{k}} \parallel_{\mathfrak{U}}^4,\ b = 3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^3 u_{\mathrm{k}}^{\perp}\ dx,$$
$$c = 3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^2 (u_{\mathrm{k}}^{\perp})^2\ dx + \alpha\beta^{-1},\ d = \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}} (u_{\mathrm{k}}^{\perp})^3 dx,$$
$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2},$$
$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right), \quad (9)$$
$$Q_k(s_{\mathrm{k}}, u) = p^3 + q^2,$$
$$R_{\mathrm{k}}(s_{\mathrm{k}}, u) = 3s_{\mathrm{k}}^2 \parallel \varphi_{\mathrm{k}} \parallel_{\mathfrak{U}}^4 + 6s_{\mathrm{k}} \int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^3 u_{\mathrm{k}}^{\perp}\ dx + 3\int_0^l \varphi_{\mathrm{k}}^2 (u_k^{\perp})^2\ dx + \alpha\beta^{-1}.$$

Для дальнейшего рассмотрения введем следующие множества

$$(U_{\mathrm{k}})_0^{\perp} = \{u \in \mathfrak{U}_k^{\perp} : R_{\mathrm{k}}(s_k, u) = 0\},$$
$$(U_k)_+^{\perp} = \{u \in \mathfrak{U}_k^{\perp} : Q_{\mathrm{k}}(s_{\mathrm{k}}, u) > 0\}, \quad (10)$$
$$(U_{\mathrm{k}})_-^{\perp} = \{u \in \mathfrak{U}_k^{\perp} : Q_{\mathrm{k}}(s_{\mathrm{k}}, u) < 0\}.$$

Теорема 1 [13]. *Пусть $\alpha\beta < 0$ и $\lambda = \lambda_k$. Тогда*

- для любого $u_0 \in (U_{\mathrm{k}})^{\perp} \cap (U_{\mathrm{k}})_-^{\perp}$ существует три решения задачи (3) – (5);
- для любого $u_0 \in (U_k)^{\perp} \cap (U_k)_+^{\perp} \cap (U_{\mathrm{k}})_0^{\perp}$ существует два решения уравнения (3) – (5);
- для любого $u_0 \in (U_k)^{\perp} \cap (U_k)_+^{\perp}$ существует одно решение задачи (3) – (5).

3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим примеры численного исследования вопроса неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для модели деформации двутавровой балки (3) – (5) на основе аналитических результатов, описанных выше. Требуется найти численное решение задачи Шоуолтера – Сидорова

$$(u(x,0)-u_0(x))+\left(u_{xx}(x,0)-u_0(x)\right)=0,\ x\in(0,\pi), \tag{15}$$

для уравнения

$$u_t+u_{xxt}=-u+u^3,\ t\in(0,1), \tag{16}$$

с краевым условием Дирихле

$$u(0,t)=u(\pi,t)=\ 0,\ x\in(0,\pi),\ t\in(0,1), \tag{17}$$

при $u_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)$.

Приближенные решения задачи (15) – (17) на интервале $(0,\pi)$ могут быть представлены в виде $u(x,t)=u_1(t)\varphi_1(x)+u_2(t)\varphi_2(x)$, где $\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\ kx,\ k=1{,}2$. Так как в условиях данного эксперимента λ совпадает с первым собственным значением $\lambda_1=1$ однородной задачи Дирихле для $(-\Delta)$, для нахождения неизвестных $u_1(t),u_2(t)$ получим систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1(t)(-3u_1^2(t)-6u_2^2(t)+2\pi)=0 \\ -6u_1^2(t)u_2(t)-3u_2^3(t)+6\pi u_2(t)dt+2\pi u_2(t)=0. \end{cases} \tag{18}$$

Используя формулы (9), найдем $Q=-0{,}0000311696<0$, из чего следует, что данная система уравнений имеет три решения. Разрешив алгебраическое уравнение системы в начальный момент времени, получим три начальных условия $u_1^1(0),u_1^2(0),u_1^3(0)$. Решая получившуюся систему методом Рунге – Кутта, получим три численных решения (рис. 1).

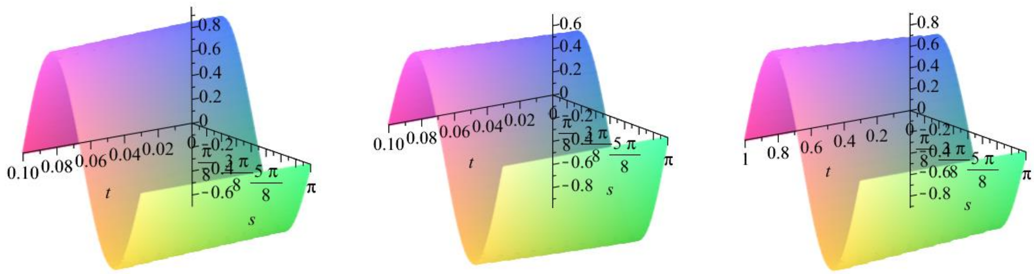

Рис. 1. Численное решение задачи (15) – (17)

Литература

1. Hoff, N.J. Creep Buckling [Text] / N.J. Hoff // Journal of the Aeronautical Science. – 1956. – № 7. – P. 1–20.
2. Манакова, Н.А. Полулинейные модели соболевского типа. Неединственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова [Текст] / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова, К.В. Перевозчикова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т.15, № 1. – С.84–100.
3. Гильмутдинова, А.Ф. О неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для одной модели Плотникова [Текст] / А.Ф. Гильмутдинова // Вестник СамГУ. – 2007. № 9. – С. 85–90.
4. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева [Текст] / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.

5. Manakova, N.A. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane [Текст] / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 4. – С. 161–168.

6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа [Текст] / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.

7. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа [Текст] / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.

8. Свиридюк, Г.А. О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа Соболева [Текст] / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Известия вузов. Математика. – 1989. № 10. – С. 44–47.

9. Zamyshlyaeva, A.A. Semilinear Sobolev Type Mathematical Models [Текст] / A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 43–59.

10. Бычков, Е. В. Сходимость приближенного решения задачи Шоуолтера – Сидорова –Дирихле для модифицированного уравнения Буссинеска [Текст] / Е. В. Бычков // Алгебра, геометрия, дифференциальные уравнения, Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. – Т. 217. – С. 11–19.

11. Замышляева, А.А. Обратная задача для уравнения соболевского типа второго порядка [Текст] / А.А. Замышляева, А.С. Муравьев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 2, № 3. – С. 5–12.

12. Manakova, N.A. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with the Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment [Текст] / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova, K.V. Perevozchikova // Differential Equations and Control Processes. – 2020. № 4. – P. 115–126.

13. Гаврилова, О.В. О неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для одной математической модели деформации двутавровой балки [Текст] / О.В. Гаврилова, Н.Г. Николаева, Н.А. Манакова // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию. Сборник трудов IV всероссийской студенческой научно-практической конференции. Челябинск, 15–16 июня 2021 г. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2021. – С. 67–71.