УДК 517.956.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_121

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов Мирза, к.ф.-м.н., доцент
mirzamamajonov@gmail.com
Кокандский государственный педагогический институт,
Коканд, Узбекистан

Аннотация. *В настоящей работе ставится ряд краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида* $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сформулирована теорема существования и единственности решения поставленной задачи. Однозначная разрешимость поставленной задачи доказывается с помощью метода построения решения, а также методами интегральных и дифференциальных уравнений*

Ключевые слова. *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

ON SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATIONS IN A TRIANGULAR DOMAIN WITH THREE LINES OF TYPE CHANGE

Mamajonov Mirza, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
mirzamamajonov@gmail.com
Kokand State Pedagogical Institute,
Kokand, Uzbekistan

Abstract. *In the present paper, a number of boundary value problems are posed for a third-order parabolic-hyperbolic type equation of the form* $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *in a triangular domain with three lines of type change. The theorem of existence and uniqueness of the solution of the stated problem is formulated. The unique solvability of the problem posed is proved using the method of constructing a solution, as well as methods of integral and differential equations.*

Key words: *Differential and integral equations, solution construction method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

В этой работе ставится один класс краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $a,b,c\in R$, $a^2+b^2\neq 0$,

$$Lu=\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}, & (x,y)\in G_1, \\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,y)\in G_i \ \ (i=2,3,4), \end{cases}$$

$G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, а G_1 есть прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; G_3 – треугольник с вершинами в точках A, $D(-1,1)$, A_0; G_4 – треугольник с вершинами в точках B, $E(2,1)$, B_0; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках A, B; $J_2 -$ открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0; $J_3 -$ открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0.

Нам следует записать области $G_i \ (i=3,4)$ в следующем виде (из которых будем пользоваться в дальнейшем): $G_3 = G_{31} \cup G_{32} \cup A_0F_1$, $G_4 = G_{41} \cup G_{42} \cup B_0F_2$, где G_{31} – треугольник с вершинами в точках A, A_0, $F_1\left(-1/2,1/2\right)$; G_{32} – треугольник с вершинами в точках A_0, D, F_1; G_{41} – треугольник с вершинами в точках B, B_0, $F_2\left(3/2,1/2\right)$; G_{42} – треугольник с вершинами в точках B_0, E, F_2; $A_0F_1 -$ открытый отрезок с вершинами в точках A_0, F_1; $B_0F_2 -$ открытый отрезок с вершинами в точках B_0, F_2.

Перед тем, как приступить к постановке краевых задач, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, из которых будем пользоваться при постановке краевых задач:

Краевые условия:

$$u_2\big|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le 1/2, \tag{2}$$

$$u_2\big|_{BC} = \psi_1(x), \quad 1/2 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \ 0 \le x \le 1/2, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \ 1/2 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u_3\big|_{DF_1} = \psi_4(x), -1 \le x \le -1/2, \tag{6}$$

$$u_3\big|_{AF_1} = \psi_3(x), -1/2 \le x \le 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{AD} = \psi_5(x), \ -1 \le x \le 0, \tag{8}$$

$$u_4\big|_{BF_2} = \psi_6(x), \ 1 \le x \le 3/2, \tag{9}$$

$$u_4\big|_{EF_2} = \psi_6(x), \ 3/2 \le x \le 2, \tag{10}$$

$$u_3\big|_{y=1} = f_1(x), \ -1 \le x \le 0, \tag{11}$$

$$u_4\big|_{y=1} = f_2(x), \ 1 \le x \le 2, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u_4}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_7(x), \ 1 \le x \le 2, \tag{13}$$

$$u_{3y}\big|_{A_0D} = f_3(x), \ -1 \le x \le 0, \tag{14}$$

$$u_{4y}\big|_{B_0E} = f_4(x), \ 1 \le x \le 2; \tag{15}$$

Условия склеивания:

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \tau_1(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{16}$$

$$u_{1y}(x,0)=u_{2y}(x,0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{17}$$

$$u_{1yy}(x,0)=u_{2yy}(x,0)=\mu_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{18}$$

$$u_1(0,y)=u_3(0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{19}$$

$$u_{1x}(0,y)=u_{3x}(0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{20}$$

$$u_{1xx}(0,y)=u_{3xx}(0,y)=\mu_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{21}$$

$$u_1(1,y)=u_4(1,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{22}$$

$$u_{1x}(1,y)=u_{4x}(1,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{23}$$

$$u_{1xx}(1,y)=u_{4xx}(1,y)=\mu_3(y),\ 0\le y\le 1. \tag{24}$$

Здесь $\psi_i\left(i=\overline{1,7}\right), f_j\left(j=\overline{1,4}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, а τ_i, ν_i, μ_i $(i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$.

В зависимости от значений коэффициентов a и b, то есть от значений углового коэффициента $\gamma=b/a$ оператора первого порядка уравнения (1), получаются различные случаи. Учитывая это для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в открытой области G при $x\neq 0,\ y\neq 0$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны в следующей таблице:

№	Значения γ	Краевые условия	Условия склеивания
1.	$\gamma=0$ ($a\neq 0$, $b=0$)	(2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) Всего: 24 таких групп условий.	(16), (17), (19)-(24)
2.	$\gamma=\infty$ ($a=0$, $b\neq 0$)	(2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий.	(16)-(20), (22), (23)
3.	$0<\gamma<1$	(2), (4), (6), (8), (11), (12), (15) Всего: 6 таких групп условий.	(16)-(24)
4.	$\gamma=1\left(a=b\right)$	(2), (4), (6), (8), (9), (11), (12) или (2), (4), (7), (8), (9), (11), (12) или (2), (4), (8), (9), (11), (12), (14).	(16)-(24)
5.	$-1<\gamma<0$	(2), (5), (10), (11), (12), (13), (14) Всего: 6 таких групп условий.	(16)-(24)
6.	$\gamma=-1\left(a=-b\right)$	(3), (5), (10), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (9), (11), (12), (13), (14) или (3), (5), (11), (12), (13), (14), (15).	(16)-(24)
7.	$-\infty<\gamma<-1$ и $1<\gamma<+\infty$	(2), (4), (5), (6), (8), (10), (11), (12), (13) Всего: 18 таких групп условий.	(16)-(24)

Здесь мы укажем решение поставленной задачи лишь в случае 1 с группой условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15). В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)(Lu)=0 \tag{1'}$$

Имеет место следующая

Теорема. Если $\psi_1\in C^3[0,1/2]$, $\psi_2\in C^2[0,1/2]$, $\psi_4\in C^3[-1,-1/2]$, $f_1\in C^3[-1,0]$, $\psi_5\in C^2[-1,0]$, $f_3\in C^3[1,2]$, $f_4\in C^2[1,2]$, причем выполняются следующие условия согласования $\tau_1(0)=\psi_1(0)$, $\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0)$, $f_1(-1)=\psi_4(-1)$, $\psi_5(0)=\psi_2(0)$, то задача 1 имеет единственное решение в случае 1 с группой условий (2), (4), (6), (8), (11), (12), (15).

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1′) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_1, \tag{25}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3,4), \tag{26}$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y)$, $(x,y)\in G_i$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$, причем $\omega_i(y)$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Учитывая виды областей G_i $(i=3,4)$, которые написаны наверху, уравнение (26) $(i=3,4)$ перепишем в виде

$$u_{ikxx}-u_{ikyy}=\omega_{ik}(y)e^{-\frac{c}{a}x},\ (x,y)\in G_{ik}\quad (i=3,4;\ k=1,2), \tag{27}$$

где введены обозначения $u_i(x,y)=u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(y)=\omega_{ik}(y)$, $(x,y)\in G_{ik}$ $(i=3,4;\ k=1,2)$.

Сначала рассмотрим задачу в области D_{32}. Записываем решение уравнения (27) $(i=3;\ k=2)$, удовлетворяющее условиям (11) и $u_{32y}(x,1)=\nu_4(x)$ ($\nu_4(x)$ – неизвестная пока достаточно гладкая функция, подлежащая определению):

$$\begin{gathered}u_{32}(x,y)=\frac{f_1(x+y-1)+f_1(x-y+1)}{2}+\\+\frac{1}{2}\int_{x-y+1}^{x+y-1}\nu_4(t)dt-\frac{1}{2}\int_1^y\omega_{32}(\eta)d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi.\end{gathered} \tag{28}$$

Подставляя (28) в условие (8), находим

$$\omega_{32}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

А подставляя (28) в условие (6), находим и функцию $\nu_4(x)$:

$$\nu_4(x)=f_1'(x)-\psi_4'\left(\frac{x-1}{2}\right)+\int_1^{-\frac{x-1}{2}}\omega_{32}(\eta)\exp\left[-\frac{c}{a}(x-1+\eta)\right]d\eta. \tag{29}$$

Таким образом, мы определили функцию $u_{32}(x,y)$. Если введем обозначение $u_{32}(x,x+1)=h_1(x)$ (где $h_1(x)$ уже известная функция), то для определения функции $u_{31}(x,y)$ получим условие

$$u_{31}(x,x+1)=h_1(x). \tag{30}$$

Теперь записываем решение уравнения (27) $(i=3;\ k=1)$, удовлетворяющее условиям (19), (20):

$$\begin{gathered}u_{31}(x,y)=\frac{\tau_2(y+x)+\tau_2(y-x)}{2}+\\+\frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x}\nu_2(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^x\exp\left(-\frac{c}{a}\eta\right)d\eta\int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{31}(\xi)d\xi.\end{gathered} \tag{31}$$

Подставляя (31) в условие (8), находим

$$\omega_{31}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ 0\le y\le\frac{1}{2}. \tag{32}$$

Теперь будем пользоваться из условия

$$\left.\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x}-\frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\right|_{y=x+1}=\left.\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x}-\frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\right|_{y=x+1}.$$

Тогда имеем

$$\omega_{31}(y)=\omega_{32}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

Из последнего равенства и (32) следует

$$\omega_{31}(y)=\sqrt{2}\psi_5'(-y)\exp\left(-\frac{c}{a}y\right),\ 0\le y\le 1.$$

Теперь подставляя (31) в условие (30), получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$:

$$\nu_2(y)=\beta_1(y)-\tau_2'(y),\ 0\le y\le 1, \tag{33}$$

где

$$\beta_1(y)=h_2'\left(\frac{y-1}{2}\right)-\int_0^{\frac{y-1}{2}}\exp\left(-\frac{c}{a}\eta\right)\omega_{31}(y-\eta)d\eta.$$

Далее, переходя в уравнениях (25) и (27) $(i=3;\ k=1)$ к пределу при $x\to 0$, получим второе и третье соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$, $\mu_2(y)$ и $\omega_1(y)$:

$$\mu_2(y) = \tau_2'(y) + \omega_1(y), \tag{34}$$

$$\mu_2(y) = \tau_2''(y) + \omega_{31}(y). \tag{35}$$

Исключая из (34) и (35) функцию $\mu_2(y)$, имеем

$$\omega_1(y) = \tau_2''(y) - \tau_2'(y) + \omega_{31}(y). \tag{36}$$

Теперь переходим в область G_2. Записываем решение уравнения (26) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (16) и (17):

$$u_2(x,y) = \frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_1(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^y \omega_2(\eta)\,d\eta \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} e^{-\frac{c}{a}\xi}\,d\xi. \tag{37}$$

Подставляя (37) в условие (4), находим

$$\omega_2(y) = \sqrt{2}\psi_2'(-y)e^{-\frac{c}{a}y}, -1/2 \le y \le 0. \tag{38}$$

Далее, подставляя (37) в условие (2) после некоторых выкладок, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1'(x) - \nu_1(x) = \alpha_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{39}$$

где $\alpha_1(x) -$ известная функция.

Переходя в (25) к пределу при $y \to 0$, имеем второе соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = \omega_1(0)e^{-\frac{c}{a}x},\ 0 \le x \le 1, \tag{40}$$

где $\omega_1(0) -$ неизвестная пока постоянная.

Исключая из (39) и (40) функцию $\nu_1(x)$, приходим к уравнению

$$\tau_1''(x) - \tau_1'(x) = -\alpha_1(x) + \omega_1(0)e^{-\frac{c}{a}x},\ 0 \le x \le 1.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x) - \tau_1(x) = \alpha_2(x) + \omega_1(0)\int\limits_0^x e^{-\frac{c}{a}t}\,dt + k_1, \tag{41}$$

где $\alpha_2(x) = \int\limits_0^x \alpha_1(t)\,dt$, а $k_1 -$ неизвестная пока постоянная.

Дифференцируя (33) и полагая в полученном равенстве $y=0$, имеем

$$\tau_2''(0) + \nu_2'(0) = \beta_1'(0).$$

Если учитываем условия $\tau_2''(0) = \mu_1(0)$, $\nu_2'(0) = \nu_1'(0)$, то получим

$$\mu_1(0) + \nu_1'(0) = \beta_1'(0). \tag{42}$$

Теперь полагая в (26) $x=0$ и $y=0$, имеем

$$\tau_1''(0) - \mu_1(0) = \omega_2(0).$$

Исключая из последнего равенства и (42) число $\mu_1(0)$, имеем соотношение

$$\tau_1''(0)+\nu_1'(0)=\beta_1'(0)+\omega_2(0).$$

Дифференцируя (39), получим

$$\tau_1''(0)-\nu_1'(0)=\alpha_1'(0).$$

Исключая из последних двух равенств $\nu_1'(0)$, находим

$$\tau_1''(0)=\frac{1}{2}\alpha_1'(0)+\frac{1}{2}\beta_1'(0)+\frac{1}{2}\omega_2(0).$$

Решая уравнение (35) при условиях

$$\tau_1(0)=\psi_1(0),\ \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0),$$

$$\tau_1''(0)=\frac{1}{2}\alpha_1'(0)+\frac{1}{2}\beta_1'(0)+\frac{1}{2}\omega_2(0),$$

находим

$$\tau_1(x)=\int_0^x \exp(x-t)\alpha_2(t)dt+\omega_1(0)\int_0^x\left[\exp(x-t)-1\right]\exp\left(-\frac{c}{a}t\right)dt+$$

$$+k_1\left[\exp(x)-1\right]+k_2\exp(x),$$

где

$$k_2=\psi_1(0),\ k_1=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0)-\psi_1(0),$$

$$\omega_1(0)=\psi_1'(0)+\frac{1}{2}\beta_1'(0)+\frac{1}{2}\omega_2(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0).$$

Теперь переходим в область D_{42}. Запишем решение уравнения (27) $(i=4;\ k=2)$, удовлетворяющего условиям (12), (15):

$$u_{42}(x,y)=\frac{f_2(x+y-1)+f_2(x-y+1)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-y+1}^{x+y-1} f_4(t)dt-\frac{1}{2}\int_1^y \omega_{42}(\eta)d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\exp\left(-\frac{c}{a}\xi\right)d\xi. \tag{43}$$

Далее, переходим в область D_{41}. Запишем решение уравнения (27) $(i=4;\ k=1)$, удовлетворяющего условиям (22), (23):

$$u_{41}(x,y)=\frac{\tau_3(y+x-1)+\tau_3(y-x+1)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{y-x+1}^{y+x-1}\nu_3(t)dt+\frac{1}{2}\int_1^x\exp\left(-\frac{c}{a}\eta\right)d\eta\int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{41}(\xi)d\xi. \tag{44}$$

Будем пользоваться из условия $\left.\left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x}+\frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right)\right|_{y=2-x}=\left.\left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x}+\frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right)\right|_{y=2-x}$. Тогда после некоторых преобразований, имеем

$$\omega_{42}(y)=\omega_{41}(y),\ \frac{1}{2}\le y\le 1.$$

Теперь будем пользоваться из условия $u_{41}(x,2-x)=u_{42}(x,2-x)$. Тогда после длинных преобразований приходим к соотношению между неизвестными функциями $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$ и $\omega_{41}(y)$:

$$\tau_3'(y)-\nu_3(y)+\int_1^y\omega_{41}(\eta)e^{-\frac{c}{a}(\eta+1-y)}d\eta=\beta_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{45}$$

где $\beta_2(y)=f_4(2-y)-f_2'(2-y)$.

Теперь переходя в уравнениях (25) и (27) $(i=4;\ k=1)$ при $x\to 1$ получим соотношения

$$\mu_3(y)-\tau_3'(y)=\omega_1(y)e^{-\frac{c}{a}},\ \mu_3(y)-\tau_3''(y)=\omega_{41}(y)e^{-\frac{c}{a}}.$$

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_3(y)$ в силу (45), находим

$$\omega_{41}(y)=\left[\tau_2''(y)-\tau_2'(y)\right]-\left[\tau_3''(y)-\tau_3'(y)\right]e^{\frac{c}{a}}+\omega_{31}(y). \tag{46}$$

Подставляя (46) в (45), имеем

$$\begin{gathered}\nu_3(y)=\int_1^y\left\{\left[\tau_2''(\eta)-\tau_2'(\eta)\right]-\left[\tau_3''(\eta)-\tau_3'(\eta)\right]e^{\frac{c}{a}}+\omega_{31}(\eta)\right\}e^{-\frac{c}{a}(\eta+1-y)}d\eta+\\+\tau_3'(y)-\beta_2(y),\quad 0\le y\le 1.\end{gathered} \tag{47}$$

Теперь переходим в область D_1. Запишем решение уравнения (25), удовлетворяющего условиям (16), (19), (22):

$$\begin{gathered}u_1(x,y)=\int_0^y\tau_2(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\tau_3(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+\\+\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y\omega_1(\eta)d\eta\int_0^1e^{-\frac{c}{a}\xi}G(x,y;\xi,\eta)d\xi,\end{gathered}$$

где

$$\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

– функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (25).

Дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю и к единице с учетом (33), (36) и (47) после длинных вычислений и преобразований, получим систему двух уравнений типа Абеля относительно $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$. Применяя к этим уравнениям обращение Абеля после длинных вычислений, приходим к систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$:

$$\tau_2''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_2''(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta=g_1(y), \qquad (48)$$

$$\tau_3'(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_2''(\eta)d\eta=g_2(y), \qquad (49)$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем ядра $K_1(y,\eta)$ и $K_3(y,\eta)$ имеют слабую особенность $(1/2)$, а остальные функции непрерывны. Поэтому система уравнений (48), (49) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$ тем самым, и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_1(y)$, $\omega_{41}(y)$, $\omega_{42}(y)$, $u_1(x,y)$, $u_{31}(x,y)$, $u_{41}(x,y)$ и $u_{42}(x,y)$.

Замечание. Аналогичные задачи для уравнений третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа рассмотрены в работах [1]-[10].

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа [Текст] / Т.Д.Джураев, А.Сопуев, М.Мамажанов -Ташкент: Фан, -1986. -220 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа / Т.Д.Джураев, М.Мамажанов // Дифференциальные уравнения, -1986, -т.22, -№1, -С. 25-31.
3. Шерматова Х.М. О постановке краевых задач для одного класса параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа. / Х.М.Шерматова // Бюллетен института математики. -2018, -№5, -С. 22-29.
4. Шерматова Х.М. Исследование одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ [Текст] / Х.М.Шерматова // Наманган давлат университети илмий ахборотномаси. -2019, -№6. -С. 9-16.
5. Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в смешанной пятиугольной области, когда угловой коэффиsиент характеристики оператора первого порядка меньше минус единицы [Текст] / Х.М.Шерматова // Наманган давлат университети илмий хабарномаси. -2019, -№7, -С. 46-54.
6. Shermatova Kh.M. Investigation of a boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation [Текст] / Kh.M.Shermatova // Scientific Bulletin of Namangan State University, 2019, 1(6), -P. 9-16.
7. Шерматова Х.М. Исследование одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ [Текст] / Х.М.Шерматова // Наманган давлат университети илмий хабарномаси. -2020, -№4, -С. 44-53.
8. Shermatova Kh.M. Investigation of a boundary-value problem for a third order parabolic hyperbolic equation in the form $\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ [Текст] / Kh.M.Shermatova // “THEORETICAL & APPLIED SCIENCE” Philadelphia, USA. № 7 (87), 2020, -P. 160-165.

9. Mamajonov M. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. [Текст] / M.Mamajonov, Yu.Karimova // Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ). 2022, Vol. 10, Issue 12, -P. 68-77.

10. Мамажонов М. Об одной краевой задаче для одного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в четырехугольной области с двумя линиями изменения типа [Текст] / М.Мамажонов, Х.М.Шерматова, Ю.Х.Каримова // Республиканская научно-практическая конференция на тему «Проблемы науки в интерпретации магистрантов». Коканд, -2022, -С. 107-112.