УДК 517.956
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_116

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кошанов Бакытбек , докт. ф.-м. наук, профессор,
koshanov@list.ru
Институт математики и математического моделирования
Алматы, Казахстан
Сабиржанов Музаффар, PhD докторант
smskg@bk.ru
Ошский Государственный Университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. В настоящей статье исследуется вопрос единственности решения регулярной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $\mathrm{l}(\cdot)-A$ с оператором Трикоми A. Порядок дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ считается произвольным натуральным числом n. Для дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ задаются регулярные краевые условия по временной переменной t. Оператор A является порожденной уравнением Трикоми $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части и дробными производными следами решения вдоль характеристик. Указывается, что данный оператор является самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$. Самосопряженность оператора A гарантирует существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций, если Ω -- область, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения.

Ключевые слова: уравнение Трикоми, регулярные краевые условия по времени, дробные производные Римана-Лиувилля, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы.

CRITERIA FOR THE UNIQUENESS OF A SOLUTION NONLOCAL TO A TIME PROBLEM FOR SOME DIFFERENTIAL-OPERATORIAL EQUATIONS

Koshanov Bakytbek, Dr. ph.-m. sciences, professor,
koshanov@list.ru
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
Almaty, Kazakhstan
Sabirzhanov Muzaffar, PhD student
smskg@bk.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this article, we study the question of the uniqueness of the solution of a time-regular problem for a differential-operatorial equation $l(\cdot)-A$ with the Tricomi operator A. The order of the differential expression is considered to be an arbitrary natural number n. The differential expression $l(\cdot)$ is given regular boundary conditions with respect to the time variable t . The operator A is generated by the Tricomi equation $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. The boundary conditions for the Tricomi operator are given by the Dirichlet condition on the elliptic part and by the fractional derivatives of the traces of the solution along the characteristics. Specifies that the given operator is a self-adjoint operator in $L_2(\Omega)$. The self-adjointness of the operator A guarantees the existence of a complete orthonormal system of eigenfunctions $L_2(\Omega)$ if is Ω a domain bounded by the Lyapunov curve and the characteristics of the wave equation*

Key words: *Tricomi equation, regular boundary conditions by time, Riemann-Liouville's fractional derivatives, uniqueness of solution, Eigen functions, complete orthonormal systems.*

1. В функциональном пространстве $L_2(0,T)$ рассмотрим оператор B, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathrm{l}(\mathrm{w}) \equiv \frac{\mathrm{d^n w}}{\mathrm{dt^n}} + \mathrm{p_1(t)}\frac{\mathrm{d^{n-1}w}}{\mathrm{dt^{n-1}}} + \cdots + \mathrm{p_n(t)w(t)},\ 0 < t < T \tag{1}$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{kj}w^{(k)}(0)+\beta_{kj}w^{(k)}(T)\right]=0\,,\ \ j=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

где $p_j(t)\epsilon\, C^{(n-j)}[0,T],\ \ j=1,2,\dots,n.$

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [1]. Иначе говоря, в случае нечетного $\mathrm{n}=2\mathrm{p}-1$ следующие два определителя θ_0,θ_1 отличны от нуля; в случае четного $\mathrm{n}=2\mathrm{p}$ следующие два определителя θ_{-1},θ_1 отличны от нуля.

Сопряженный оператор B^* задается дифференциальным выражением

$$B^*R(t)\ =\ l^+(R),\qquad 0<t<T$$

и областью определения

$$D(B^*)\ =\ \{R\,\epsilon\, W_2^n[0,T]:\ V_1(R)\ =\ 0,\dots,V_n(R)\ =\ 0\}.$$

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Пусть область определения оператора В задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения оператора сопряженного* B^* *задается также регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.*

Нам потребуется также следующее утверждение [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть оператор В порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора В является полной системой в пространстве* $L_2(0,T)$.

Применяя теорему 1 и теорему 2 к сопряженному оператору B^*, можем сформулировать утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены требование I. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора* B^* *полна в пространстве* $L_2(0,T)$.

2. Пусть $\Omega\ \in\ \mathbb{R}^2$ - конечная область, ограниченная при $y>0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0{,}0)$ и $B(1{,}0)$ малыми дугами "нормальной кривой" σ_0, а при $y<0$ – характеристиками $OC\colon\ \mathrm{x}-\frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}}=0,\ BC\colon \mathrm{x}+\frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}}=1$ уравнения

$$Av=\ yv_{xx}(x,y)\ +\ v_{yy}(x,y)\ =\ f(x,y) \qquad (3)$$

Задача Т. Найти в Ω решение уравнения (3), удовлетворяющие условию

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0}=0,\quad \sigma_0\colon (x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{4}{9}y^3=\tfrac{1}{4}\ , \qquad (4)$$

$$\mathrm{x}^{5/6}\mathrm{D}_{0+}^{1/6}\left(u(\chi_0(\mathrm{x}))\mathrm{x}^{-2/3}\right)+(1-\mathrm{x})^{5/6}\mathrm{D}_{1-}^{1/6}\left(\mathrm{u}(\chi_1(\mathrm{x}))(1-\mathrm{x})^{-2/3}\right)=0, (5)$$

где

$$\mathrm{u}\big(\chi_0(\mathrm{x})\big)=\mathrm{u}\left(\mathrm{x},-\left[\frac{3\mathrm{x}}{2}\right]^{2/3}\right),\qquad 0\le \mathrm{x}\le\frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x)) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

Здесь граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана-Лиувилля [2]

$$D_{0+}^{1/6} g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1/6}}\,dt,$$
$$D_{1-}^{1/6} g(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{\frac{1}{6}}}\,dt.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче T обозначим через A. Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов η_m. Собственные функции оператора A обозначим через $v_m(x,y)$ соответствующих собственным значением η_m.

В работе [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 4 [4]. Оператор A является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Как следствие данной теоремы 4 заключаем, что собственные функций $\{v_m(x,y), m = 1,2,\ldots,\}$ оператора A образуют полную систему функций в $L_2(\Omega)$.

1. Пусть Ω - конечная область из предыдущего пункта. В области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^n u(x,y;t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial^{n-j} u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}} == y\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial x^2} +$$
$$+\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial y^2} + f(x,y;t), (x,y) \in \Omega,\ 0 < t < T \qquad (6)$$

с краевыми условиями по t

$$U_v(u(x,y;\cdot)) = 0, \qquad v = 1,2,\ldots,n,\ (x,y) \in \Omega \qquad (7)$$

и с условиями по (x,y)

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}, \qquad (8)$$

$$x^{5/6} D_{0+}^{5/6}(u(\chi_0(x);t)x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6} D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x);t)(1-x)^{-2/3}) = 0, \ (9)$$

где

$$u(\chi_0(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{\frac{2}{3}}; t\right), 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{\frac{2}{3}}; t\right), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1, \qquad 0 < t < T.$$

Операторная запись вышеприведенной задачи (6)-(9) имеет вид

$$Bu(x,y;t) = Au(x,y;t) + f(x,y;t), \ \ (x,y;t) \in Q. \qquad (10)$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в пункте 1. Оператор A действует по переменным (x,y) и его спектральные свойства приведены в пункте 2.

В данном пункте докажем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (10).

Теорема 5. Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au \tag{11}$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(\mathrm{A})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) = \emptyset , \tag{12}$$

где $\sigma(B)$ *и* $\sigma(A)$ - *спектры операторов B и A соответственно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 14869558 МОН РК.

Литература

1. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы[Текст] / Наймарк М.А.. 1969. Наука, Москва. 528 с.
2. Kilbas, A.A. Theory and Applications of fractional differential equations[Текст] / Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.. 2006. Elsevier. 541 p.
3. Кесельман, Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов[Текст] / Кесельман Г.М. // Изв. вузов. матем. 1964. № 2. С. 82-93.
4. Кальменов, Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми[Текст] / Кальменов Т.Ш. //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 66-75.