УДК 517.97
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_110

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско- Российский Славянский университет им. Б. Ельцина
Эрмекбаева Айжан Турдубековна, ст. преподаватель,
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Исследованы некоторые особенности построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом в случае, когда краевая задача управляемого процесса в уравнении содержит интегральный оператор Фредгольма. Исследована сходимость приближенного решения и найдены достаточные условия сходимости. При исследовании были использованы методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, классического вариационного исчисления, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.*

Ключевые слова: *оптимальное управление, оптимальный процесс, приближенное решение, сходимость, функционал.*

ФРЕДГОЛЬМ ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕСИ МЕНЕН МҮНӨЗДӨЛГӨН ЖЫЛУЛУУК ПРОЦЕССТЕРИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМИЗАЦИЯЛОО МАСЕЛЕСИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Керимбеков Акылбек, ф.-м.и.д., профессор,
akl7@rambler.ru
Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети
Эрмекбаева Айжан Турдубековна, улук окутуучу,
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада теңдемеде Фредгольмдун интегралдык оператору башкаруу процессинде камтылганда, жылуулукпроцессин кыймылдуу чекиттик башкаруу учурундагы сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин жакындаштырып чыгаруунун айрым өзгөчөлүктөрү изилденген. Жакындаштырылган чыгарылыштын окшоштугу изилденген жана алардын окшоштугунун жетиштүү шарттары табылган. Изилдөөдө бөлүштүрүлгөн параметрлер системасында оптималдуу башкаруу теориясынын методдору , вариациялык эсептөө, математикалык физиканын теңдемелери, функционалдык анализ жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теориясы колдонулду.*

Ключевые слова: *оптималдык башкаруу, оптималдуу процесс, жакындаштырылган чечим, жыйналуучулук, функционал.*

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THE THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY A FREDHOLM INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kerimbekov Akylbek, Dr Sc, professor,
akl7@rambler.ru
Kyrgyz Russian Slavic University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin
Ermekbaeva Ayzhan Turdubekovna, teacher,
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article investigates some features of the construction of the approximate solution of the problem of nonlinear optimization for the mobile point control of the thermal process in the case, when the boundary value problem of a controlled process in the equation contains the integral Fredholm operator. The convergence of the approximate solution is studied and sufficient conditions for their convergence are found. The methods of the optimal* *control theory of distributed parameters systems, methods of classical variational calculus, methods of solving of equations of mathematical physics, methods functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.*

Key words: *optimal control, optimal process, approximate solution, convergence, functional.*

Введение

При исследовании задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных обнаруживается, что наличия интегрального оператора того или иного вида приводит к изменению структуры решения задачи нелинейной оптимизации [1]. В работах [2, 3] исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом в случае, когда краевая задача управляемого процесса в уравнении содержит интегральный оператор Фредгольма. Здесь мы приведем некоторые данные, которые могут быть использованы при доказательстве сходимости приближенных решений. Требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\quad \beta>0$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t=V_{xx}+\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)V\left(\tau,x\right)d\tau+\delta\left(x-x_0\left(t\right)\right)f[t,u\left(t\right)],\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T,$$

$$V\left(0,x\right)=\psi\left(x\right),\qquad 0<x<1,$$

$$V_x\left(t,0\right)=0,\qquad V_x\left(t,1\right)+\alpha V\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\le T.$$

где заданные функции $\xi\left(x\right)\in H\left(0,1\right)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ и ядро $K(t,\tau),$ определеная в области $D=\{0\le t\le T,0\le\tau\le T\}$, все являются элементами гильбертова пространства $H(Y)$. Здесь $H(Y)-$пространство Гильберта квадратично−суммируемых функций, определенных на множестве Y, $f[t,u(t)]\in H(0,T)-$ заданные функции, причем функция $f[t,u(t)]$ –нелинейна по функциональной переменной $u(t)\in H(0,T)$ и является монотонной функцией, т.е.

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u(t)}\ne 0,\ \forall t\in[0,T];$$

$\delta(x-x_0(t))-$сингулярная обобщенная функция Дирака, $0<x_0(t)<1;$ $T-$ фиксированный момент времени, $\alpha-$ положительная постоянная, $\lambda-$ параметр.

1. Приближение оптимального управления и их сходимость.

Алгоритм построения приближений оптимального управления определяются по формулам

$$u_n(t)=\varphi\left[t,q_n(t),\beta\right],\ n=1,2,3,...,$$

где $q_n\left(t\right)$ находится методом последовательных приближений, как решение нелинейного интегрального уравнения, и в пределе совпадает с точным решением, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}q_n\left(t\right)=q^0\left(t\right),$ причем удовлетворяет оценке

$$\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ n=1,2,3,\ldots,\ 0<\gamma<1.$$

Лемма 1. Приближения оптимального управления сходится к оптимальному управлению по норме гильбертово пространства $H(0,T)$.

$$\left\|u^0(t)-u_n(t)\right\|_{H(0,T)} = \left\|\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right]-\varphi\left[t,q_n(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)} \le$$

$$\le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ ,$$

так как функция $\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right]$ является элементом гильбертово пространства $H(0,T)$.

2. Приближения оптимального процесса и их сходимость.

Различают следующие виды приближений оптимального процесса:

1) $m-$е приближение оптимального процесса по “резольвенте":

$$V_m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T \varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x),$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$

$$\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}ds, 0\le\tau\le t, \\ \lambda\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, t\le\tau\le T. \end{cases}$$

Лемма 2. Приближения оптимального процесса по резольвенте сходится к оптимальному процессу по норме гильбертово пространства $H(0,T)$.

$$\left\|V^0(t,x)-V_m^0(t,x)\right\|_{H(Q)} \le C_1\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

2) $m,k-$е приближение оптимального процесса, построенное с учетом приближения оптимального управления

$$V_m^k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T \varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

Лемма 3. $m,k-$е приближение оптимального процесса сходится по норме $H(Q)$.

$$\left\|V_m^0(t,x)-V_m^k(t,x)\right\|_{H(Q)}^2 \le C_2^2 f_0^2\varphi_0^2(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

3) $m,k,r-$е конечномерное приближение оптимального процесса

$$V_m^{k,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T \varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

Лемма 4. Конечномерное приближение оптимального процесса сходится к $m,k-$му приближению оптимального процесса по норме гильбертово пространства $H(Q)$.

$$\left\| V_m^k(t,x) - V_m^{k,r}(t,x) \right\|_{H(Q)}^2 = \frac{C_3}{\pi^2}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\right] = \frac{C_3}{\pi^2}\frac{r+1}{r^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 .$$

Лемма 5. Конечномерные приближения сходится к оптимальному процессу по норме гильбертово пространства $H(Q)$.

$$\left\| V^0(t,x) - V_m^{k,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \left\| V^0(t,x) - V_m(t,x) \right\|_{H(Q)} + \left\| V_m(t,x) - V_m^k(t,x) \right\|_{H(Q)} +$$

$$+\left\| V_m^k(t,x) - V_m^{k,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

3. Приближения минимального значения функционала и их сходимость.

Для минимального значения функционала будем различать следующие виды его приближений:

1) $m-$е приближение по “резольвенте” минимального значения функционала

$$J_m\left[u^0(t)\right] = \int_0^1 \left[V_m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt,\ \ \beta>0,$$

Лемма 6. $m-$е приближение функционала по резольвенте сходится к минимальному значению функционала.

$$\left| J(u^0) - J_m(u^0) \right| \le \left\| V^0(T,x) + V_m^0(T,x) - 2\xi(x) \right\|_{H(0,1)} \left\| V^0(T,x) - V_m^0(T,x) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

2) $m,k-$ е приближение минимального значения функционала

$$J_m\left[u_k(t)\right] = \int_0^1 \left[V_m^k(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \ \beta>0,$$

Лемма 7. $m,k-$е приближение минимального значения функционала сходится к $m-$му приближению.

$$\left| J_m(u^0) - J_m(u_k) \right| \le \left\| V_m^0(T,x) + V_m^k(T,x) - 2\xi(x) \right\|_{H(0,1)} C_2 f_0\varphi_0(\beta) \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} +$$

$$+\beta\left\| p(t,u^0(t)) + p(t,u_k(t)\right\| \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{\forall m} 0,$$

3) $m,k,r-$ е приближение минимального значения функционала

$$J_m^r\left[u_k(t)\right] = \int_0^1 \left[V_m^{k,r}(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \ \beta>0.$$

Лемма 8. $m,k,r-$ е приближение минимального значения функционала сходится к $m,k-$му приближению.

$$\left| J_m(u_k) - J_m^r(u_k) \right| \le \left\| V_m^k(T,x) + V_m^{k,r}(T,x) - 2\xi(x) \right\|_{H(0,1)} \overline{C_3}\frac{1}{\pi^2}\frac{r+1}{r^2} \xrightarrow[r\to\infty]{\forall m,k} 0.$$

Лемма 9. Конечномерные приближения сходятся к минимальному значению функционала.

$$\left| J(u^0) - J_m^r(u_k) \right| \le \left| J(u^0) - J_m(u^0) \right| + \left| J_m(u^0) - J_m(u_k) \right| + \left| J_m(u_k) - J_m^r(u_k) \right| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

Вывод.

Как следует из полученных результатов наличие интегрального оператора Фредгольма в краевой задаче управляемого процесса существенно влияет на построение приближений как оптимального процесса, так и минимального значения функционала. Отметим, что это обстоятельство влияет также на скорости сходимости приближений.

Литература

1. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the boundary control of thermal processes, described by the Fredholm integro-differential equation [Текст] / / A. Kerimbekov // Abstracts of International Congress of Mathematicians. South Korea, Seoul, 2014. – P.570.

2. Эрмекбаева, А.Т. Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями[Текст] / / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Журнал «Вестник КРСУ». − Том 16, № 5. – Бишкек, 2016. − С. 45−50.

3. Эрмекбаева А.Т. Подвижное оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями[Текст] / / А.Т. Эрмекбаева // Журнал «Вестник КРСУ». − Том 17, № 1. – Бишкек, 2017. − С. 71-75.