

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

[https://doi.org/10.52754/16948645\\_2023\\_2\\_140](https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_140)

### РАСЧЕТ ИЗГИБА МЕМБРАНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ушаков Андрей Леонидович к.ф.-м.н., доцент,  
ushakoval@susu.ru

Еремчук Максим Павлович  
et2222emp32@susu.ru

Южно-Уральский государственный университет  
Челябинск, Российская Федерация

**Аннотация:** Описана задача для экранированного уравнения Пуассона в L-образной области, когда на двух больших сторонах выполняется однородное условие Неймана, а на остальных сторонах области задано однородное условие Дирихле. Предлагается метод итерационных расширений для нахождения приближенного решения задачи. Реализована программа на ЭВМ, вычисляющая массив поля перемещений точек мембраны. Исходными данными являются заданные длины сторон области, значения массива выбираемой правой части экранированного уравнения Пуассона в узлах заданной квадратной сетки и выбираемая точность решения разностного аналога решаемой задачи. В программе реализованы: графическое представление массива поля перемещений точек мембраны и запись результатов в отдельный файл.

**Ключевые слова:** задача Неймана, задача Дирихле, экранированное уравнение Пуассона, метод фиктивных компонент, метод итерационных расширений.

### CALCULATION OF MEMBRANE'S BENDING ON ELASTIC BASE

Ushakov Andrey Leonidovich, Cand. Sc., Associate Professor,  
ushakoval@susu.ru

Eremchuk Maksim Pavlovich  
et2222emp32@susu.ru

South Ural State University  
Chelyabinsk, Russian Federation

**Abstract:** Problem for screened Poisson equation in L-shaped domain with homogeneous Neumann boundary condition on larger sides and homogeneous Dirichlet boundary condition on the rest of sides described. Method of iterative extensions for finding an approximate solution proposed. Computer program for calculating an array field of membrane point's movement implemented. Input data are lengths of domain sides, array of right-hand values of screened Poisson equation in grid nodes of predetermined size, and accuracy of solution of difference analogue of the problem. Program implements visualization of array field of membrane point's movement and writing this array into file.

**Keywords:** Neumann boundary condition, Dirichlet boundary condition, screened Poisson equation, method of fictitious components, method of iterative extensions.

1. **Введение (Introduction)** Рассматривается смешанная краевая задача для экранированного уравнения Пуассона в ограниченной области с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Проблемы в решении эллиптических уравнений обычно возникают из-за сложной геометрии области, присутствия краевого условия Дирихле и высокого порядка дифференциальных уравнений [1-3]. Для решения поставленной задачи применим метод итерационных расширений, являющийся обобщением метода фиктивных компонент [4-5] и легко реализуемый на ЭВМ. Данный метод является логарифмически оптимальным или

оптимальным по количеству арифметических операций, необходимых для достижения заданной относительной погрешности [6-7].

**2. Постановка задачи (Problem formulation)** Пусть задана первая ограниченная плоская область и выбирается вторая ограниченная плоская область.

$$\Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2, \omega \in \{1, \text{II}\}.$$

Требуется, чтобы пересечение этих областей было пусто, а объединение их замыканий было замыканием прямоугольной области.

$$\Omega_1 \cap \Omega_{\text{II}} = \emptyset, \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\text{II}} = \bar{\Pi}.$$

Граница каждой из трех областей состоит из замыкания объединения двух открытых непересекающихся частей.

$$\partial\Pi = \bar{s}, s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

$$\partial\Omega_\omega = \bar{s}_\omega, s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2}, \Gamma_{\omega,1} \cap \Gamma_{\omega,2} = \emptyset.$$

Полагаем, что пересечение границ первой и второй области является замыканием непустого пересечения первой части границы первой области со второй частью границы второй области.

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\text{II}} = \bar{S}, S = \Gamma_{1,1} \cap \Gamma_{\text{II},2} \neq \emptyset.$$

Все рассматриваемые части границ у всех областей являются объединением конечного числа непересекающихся открытых дуг достаточно гладких кривых. Рассматриваются области, границы которых не имеют самопересечений и самокасаний.

Рассмотрим следующие области в прямоугольной системе координат.

$$\Omega_1 = (0;b) \times (0;b) \setminus [a;b] \times [a;b], \Omega_{\text{II}} = (a;b) \times (a;b), \Pi = (0;b) \times (0;b).$$

Первая область по форме является L-образной областью, а вторая область является квадратом.

$$\Gamma_1 = \{b\} \times (0;b) \cup (0;b) \times \{b\}, \Gamma_2 = \{0\} \times (0;b) \cup (0;b) \times \{0\},$$

$$\Gamma_{1,1} = \{b\} \times (0;a) \cup (0;a) \times \{b\} \cup \{a\} \times (a;b) \cup (a;b) \times \{a\},$$

$$\Gamma_{1,2} = \{0\} \times (0;b) \cup (0;b) \times \{0\}, \Gamma_{\text{II},1} = \{b\} \times (a;b) \cup (a;b) \times \{b\},$$

$$\Gamma_{\text{II},2} = \{a\} \times (a;b) \cup (a;b) \times \{a\}.$$

В первой области рассматриваем смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона. Во второй области вводим смешанную краевую задачу для однородного экранированного уравнения Пуассона. На первых частях границ областей задаем однородное условие Дирихле. На вторых частях границ областей рассматриваем однородное условие Неймана. Задача на первой области является решаемой задачей. Задачу на второй области рассматриваем в качестве нулевого фиктивного продолжения решаемой задачи. Сформулируем нашу задачу на ранее заданных областях:

$$-\Delta \check{u}_1 + \check{u}_1 = \check{f}_1 \text{ в } (0;b) \times (0;b) \setminus [a;b] \times [a;b],$$

$$\check{u}_1 = 0 \text{ на } \{b\} \times (0;a) \cup (0;a) \times \{b\} \cup \{a\} \times (a;b) \cup (a;b) \times \{b\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \check{u}_1}{\partial n} = 0 \text{ на } \{0\} \times (0;b) \cup (0;b) \times \{0\}.$$

Решение задачи – функция перемещения точек L-образной мембраны, расположенной в горизонтальном положении под действием нагрузки определяемой правой частью уравнения.

Необходимо разработать программу для ЭВМ, вычисляющую приближенное решение описанной задачи. Входными данными для программы являются длины сторон областей, размер квадратной сетки, значения массива выбираемой правой части экранированного уравнения Пуассона в узлах сетки и точность решения. Результатом выполнения программы должен быть массив поля перемещений точек мембраны. Должно быть реализовано графическое представление массива решения и возможность записи результатов в отдельный файл.

**3. Метод итерационных расширений (Method of iterative extensions)** Рассмотрим решаемую задачу (1) в матричной форме. Аппроксимируя задачу в конечномерном подпространстве, получим систему алгебраических уравнений.

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : B\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

Для решения задачи (2) применим метод итерационных расширений как обобщение метода фиктивных компонент в матричной форме.

$$\langle A_I \bar{u}, \bar{v} \rangle = A_I(\tilde{u}, \tilde{v}), \langle A_{II} \bar{u}, \bar{v} \rangle = A_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Введённые матрицы имеют определённую структуру.

$$A_I = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим расширенную матрицу, как сумму первой матрицы и второй матрицы, умноженной на положительный параметр.

$$C = A_I + \gamma A_{II}, \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{02} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty).$$

Тогда итеративный процесс будем иметь вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) &= -\tau_{k-1} (B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), k \in \mathbb{N}, \\ \forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \tau_0 &= 1, \tau_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle / \langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для нахождения итерационных параметров необходимо найти невязку, поправку и эквивалентную невязку.

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \eta^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Для метода итерационных расширений (3) выполняется неравенство:

$$\|\bar{u}^1 - \bar{u}\|_{C^2} \leq 2 \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}.$$

Подробнее распишем алгоритм решения задачи (2). В нашей квадратной области и на опоясывающей полосе введем сетку с узлами и будем представлять правую часть уравнения (2) в виде сеточной функции.

$$(x_i; y_j) = ((i-1,5)h; (j-1,5)h), h = 2,5 / (n-1,5), n = 5m-1, m \in \mathbb{N},$$

$$\bar{f}_{i,j} = \bar{f}(x_i; y_j) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n.$$

1) Вычисляем величину квадрата нормы начальной абсолютной ошибки, которая сохраняется в течение всех вычислений.

$$E_0 = (\bar{f}, \bar{f})h^2.$$

2) Находим первое приближение.

$$\bar{u}^1 \in \mathbb{R}^N : A\bar{u}^1 = \bar{f}.$$

3) Вычисляем невязку.

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f} = A_{II}\bar{u}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

4) Вычисляем очередную величину квадрата нормы абсолютной ошибки.

$$E_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1})h^2, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

5) Находим поправку.

$$\bar{w}^{k-1} \in \mathbb{R}^N : A\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

6) Вычисляем эквивалентную невязку.

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1} = A_{II}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

7) Вычисляем итерационный параметр.

$$\tau_{k-1} = (\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}) / (\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

8) Находим новое приближение.

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

9) Проверяем условие остановки итераций.

$$E_{k-1} \leq E^2 E_0, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, E \in (0; 1).$$

Если условие остановки итераций не достигается, то все повторяем с пункта 3.

#### 4. Пример применения запрограммированного метода итерационных расширений (Example of applying of programmed method of iterative extensions)

Приводится пример решения задачи (1) для следующей области:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{2, 5\} \times (0; 2, 5) \cup (0; 2, 5) \times \{2, 5\}, \Gamma_2 = \{0\} \times (0; 2, 5) \cup (0; 2, 5) \times \{0\}, \\ \Gamma_{1,1} &= \{2, 5\} \times (0; 1, 5) \cup (0; 1, 5) \times \{2, 5\} \cup \{1, 5\} \times (1, 5; 2, 5) \cup (1, 5; 2, 5) \times \{1, 5\}, \\ \Gamma_{1,2} &= \{0\} \times (0; 2, 5) \cup (0; 2, 5) \times \{0\}, \Gamma_{II,1} = \{2, 5\} \times (1, 5; 2, 5) \cup (1, 5; 2, 5) \times \{2, 5\}, \\ \Gamma_{II,2} &= \{1, 5\} \times (1, 5; 2, 5) \cup (1, 5; 2, 5) \times \{1, 5\}. \end{aligned}$$

Вводится функция, определяющая нагрузку на мембрану, и функция, являющаяся искомым решением, которую мы будем использовать для подтверждения применимости предложенного метода.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= ((392 - 384x)(64y^3 - 196y^2 + 225) + (64x^3 - 196x^2 + 225)(392 - 384y))/184^2 + \\ &+ (64x^3 - 196x^2 + 225)(64y^3 - 196y^2 + 225)/184^2, \\ \tilde{y}_1 &= (64x^3 - 196x^2 + 225)(64y^3 - 196y^2 + 225)/184^2. \end{aligned}$$

Найденное последнее приближение к решению при  $n = 254$  отобразим на графике вместе с решением (см. рис. 1).

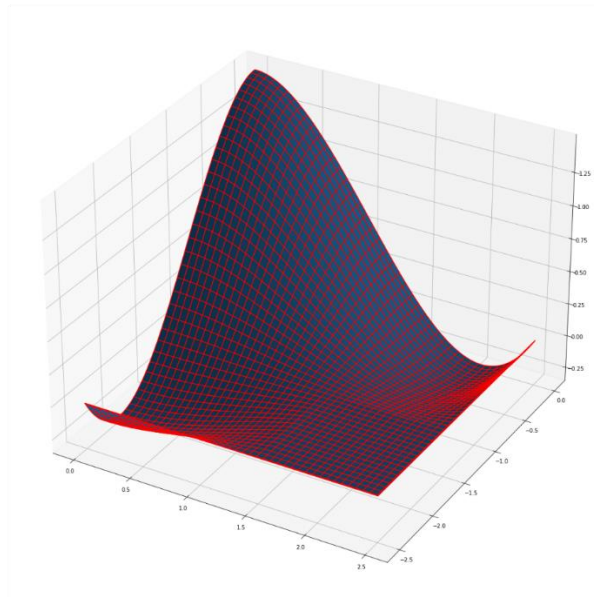


Рис. 1. График решения и последнего приближения

Теперь вычислим величину максимальной ошибки на самой мелкой сетке при  $n = 502$

$$\varepsilon = \frac{\max_{2 \leq i, j \leq n-1} |u_{i,j}^k - \tilde{u}_{i,j}|}{\max_{2 \leq i, j \leq n-1} |\tilde{u}_{i,j}|} = 0,00021.$$

Построим график функции количества итераций в итерационном процессе в зависимости от числа узлов по направлениям осей (см. рис. 2).

$$k = k(n), \quad n = 4, 54, 104, 154, 204, 254.$$

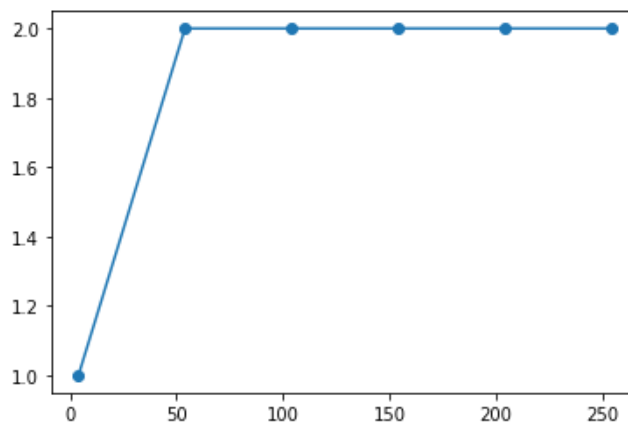


Рис. 2. Зависимость количества итераций от количества узлов

**5. Заключение (Conclusion)** Реализованную программу на ЭВМ для приближенного решения экранированного уравнения Пуассона с заданной точностью на L-образной области можно применять для расчета изгиба мембраны на упругом основании.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems / J.-P. Aubin // New York: Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.
2. Ushakov A.L. Investigation of a mixed boundary value problem for Poisson equation / A.L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273-278.
3. Ушаков А.Л. Анализ смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков

- // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, №1. – С. 29-40.
4. Мацокин А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52-68.
  5. Marchuk G.I. Fictitious Domain and Domain Decomposition Methods / G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 1986. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 3-35.
  6. Ушаков А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 138-142.
  7. Ушаков А.Л. Асимптотически оптимальное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2019. – Т. 11, №2. – С. 25-35.