МАТЕМАТИКА

УДК 517.962.22
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_132

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Урдалетова Анаркуль Бурганаковна, к.ф.-м.н., профессор,
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
Кыдыралиев Сыргак Капарович, д.э.н., профессор,
kydyraliev_s@auca.kg
Бурова Елена Сергеевна, старший преподаватель
burova_e@auca.kg
Американский университет в Центральной Азии,
Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *Разностные уравнения являются замечательным инструментом исследования окружающей человека действительности. Они в полной мере иллюстрируют высказывание великого математика Жюля Анри Пуанкаре: «Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем». Несмотря на это, к сожаленью, они не занимают достойного места в программах обучения физиков, экономистов, политологов и других ученых. Возможно, дело в том, что нет достаточного количества понятно и интересно написанных материалов по соответствующей теме. Надеемся, что представленный материал в какой-то мере поможет преодолеть этот недостаток.*

Ключевые слова: линейные разностные уравнения, уравнения первого порядка, формула для решения, решение уравнений с правой частью в общем виде, новый подход к решению разностных уравнений.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ АЙЫРМА ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫ КОЛДОНУУ

Урдалетова Анаркүл Бурганаковна, физика-математика илимдеринин кандидаты,
профессор, anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
Кыргыз-Түрк «Манас» университети,
Кыдыралиев Сыргак Капарович, экономика илимдеринин доктору, профессор,
kydyraliev_s@auca.kg
Бурова Елена Сергеевна, ага окутуучу
burova_e@auca.kg
Борбордук Азиядагы Америка университети,
Бишкек, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Айырма теңдемелери адамды курчап турган чөйрөнү изилдөө үчүн эң сонун курал. Алар улуу математик Жюль Анри Пуанкаренин: «Математика – ар кандай нерселерди бир эле ат менен атай билүү өнөрү» деген сөзүн толук чагылдырат. Буга карабастан, тилекке каршы, алар физиктерди, экономисттерди, саясат таануучуларды жана башка окумуштууларды даярдоо программаларында татыктуу орунду ээлебей жатышат. Балким, бул факт тиешелүү тема боюнча так жана кызыктуу жазылган материалдардын жетишсиздигинен. Берилген материал бул кемчиликти кандайдыр бир*

деңгээлде жоюуга жардам берет деп ишенебиз.

Урунттуу сөздөр: сызыктуу айырма теңдемелери, биринчи даражадагы теңдемелер, чечүү формуласы, оң тарабы жалпы түрдө берилген теңдемелердин чечими, айырма теңдемелерин чыгаруудагы жаңы ыкма.

FIRST ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH APPLICATIONS

Urdaletova Anarkul Burganakovna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
anarkul.urdaletova@manas.edu.kg
Kyrgyz-Turkish University "Manas",
Kydyraliev Syrgak Kaparovich, Doctor of Economics, Professor,
kydyraliev_s@auca.kg
Burova Elena Sergeevna, Senior Lecturer
burova_e@auca.kg
American University of Central Asia,
Bishkek, Kyrgyz Republic

***Abstract**: Difference equations are a wonderful tool for studying the reality surrounding a person. They fully illustrate the statement of the great mathematician Jules Henri Poincaré: "Mathematics is the art of calling different things by the same name." Despite this, unfortunately, they do not occupy a worthy place in the training programs of physicists, economists, political scientists and other scientists. Perhaps the fact is that there is not enough clear and interestingly written materials on the relevant topic. We hope that the presented material will help to overcome this shortcoming to some extent.*

***Keywords**: linear difference equations, first-order equations, solution formula, solution of equations with general right-hand side, new approach to solving difference equations.*

Введение

К сожалению, подавляющее большинство людей считают, что математика является очень сложным предметом и стараются избежать ситуаций, в которых требуется использование математических методов.

В результате они оказываются в двойном проигрыше. Во-первых, природа и общество устроены так, что обойтись без математики невозможно.

Во-вторых, многие проблемы решаются проще, а результаты решения приносят большую выгоду, если при этом используется математика. [1-3]. Конечно, необходим относительно простой, удобный в использовании математический аппарат. По нашему мнению, заметное место в арсенале научных работников должны занимать разностные уравнения. В данной статье мы показываем, что даже ограничиваясь только линейными уравнениями первого порядка можно смоделировать большое количество разнообразных явлений.

1. Рассматриваются линейные разностные уравнения

$$x_n = ax_{n-1} + b(n), \tag{1}$$

где a — некоторое число, $b(n)$ — заданная функция.

Обычно [4 - 6], в работах, нацеленных на применение линейных разностных уравнений, изучаются уравнения вида $x_n = ax_{n-1} + b$ и

$x_n = px_{n-1} + qr^{n-1}$. В данной работе изучаются и другие уравнения семейства (1).

Ключевую роль в нашем исследовании будет играть довольно простое утверждение, которое мы назовем

ЛЕММА

Если имеет место разностное уравнение

$$u_n - u_{n-1} = f(n),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

то справедливо равенство $u_N - u_0 = \sum_{n=1}^{N} f(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Расставив скобки в тождестве

$u_N - u_0 = u_N - u_{N-1} + u_{N-1} - u_{N-2} + u_{N-2} - u_{N-3} + u_{N-3} - \ldots + u_2 - u_1 + u_1 - u_0$, получим

$u_N - u_0 = (u_N - u_{N-1}) + (u_{N-1} - u_{N-2}) + (u_{N-2} - u_{N-3}) + \ldots + (u_2 - u_1) + (u_1 - u_0)$.

Далее, заменив каждую скобку ее значением из уравнения (2), получим требуемое:

$$u_N - u_0 = f(N) + f(N-1) + \ldots + f(2) + f(1).$$

2. Начнем с элементарного примера использования ЛЕММЫ. Оказывается с ее помощью можно довольно легко справиться с некоторыми задачами на суммирование, которые часто предлагают на различных математических олимпиадах и конкурсах.

Задача 1.

Вычислить сумму $S_n = \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \ldots \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$.

Решение.

Преобразуем числители: $S_n = \frac{(7-3)/4}{3\cdot 7} + \frac{(11-7)/4}{7\cdot 11} + \frac{(15-11)/4}{11\cdot 15} + \ldots + \frac{((4n+3)-(4n-1))/4}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$

.

Теперь, достаточно разбить каждую дробь на две:

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15}\right) + \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right).$$

В итоге, $S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}\right)$.

3. Настало время воспользоваться ЛЕММОЙ для получения решения уравнения (1) - уравнения $x_n = ax_{n-1} + b(n)$. Для этого, разделим уравнение (1) на a^n, и введем обозначения $\frac{x_k}{a^k} = u_k$; $\frac{b(k)}{a^k} = f(k)$. Тогда, $u_n - u_{n-1} = f(n)$ и, согласно ЛЕММЕ, $u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Вернемся к исходным обозначениям: $\frac{x_n}{a^n} - x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{b(k)}{a^k}$. Таким образом, получаем, что решением уравнения (1) является функция

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b(k). \tag{3}$$

Задача 2.

Используем формулу (3) для того, чтобы получить формулу для решения уравнения $x_n = ax_{n-1} + qr^{n-1}$.

Решение. Итак, в данном случае $b(n) = qr^{n-1}$. Поэтому, согласно (3),

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} q r^{k-1} <=> x_n = a^n x_0 + q\left(a^{n-1} + a^{n-2} r + a^{n-3} r^2 + ... + a r^{n-2} + r^{n-1}\right) <=>$$

$$x_n = a^n x_0 + q a^{n-1}\left(1 + \frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^3}{a^3} + ... + \frac{r^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{r^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

Так как внутри скобок стоит сумма *n* членов геометрической прогрессии со знаменателем *r/a*, получаем $x_n = a^n x_0 + q a^{n-1} \frac{1-(r/a)^n}{1-(r/a)}$. Осталось переписать полученную формулу в виде

$$x_n = a^n x_0 + q \frac{a^n - r^n}{a - r} \tag{3G}$$

(G – от слова Geometric, так как в данном случае $b(n) = qr^{n-1}$ являются членами геометрической прогрессии. *)*

Задача 3.

В 150 тысячном городе естественный прирост имеет отрицательный знак: (-4%). Из других мест в этот город в первый год переехало на 10 000 человек больше, чем уехало. Предполагая, что в каждый последующий год это число будет расти на 2%, определите каким будет население через 8 лет.

Решение.

Обозначим количество жителей города в конце года с номером *n* через x_n, получим уравнение $x_n = (1 - 0,04)x_{n-1} + 10000(1 + 0,02)^{n-1}$ с начальным условием $x_0 = 150000$. Поэтому, $x_8 = (0,96)^8 \cdot 150000 + 10000 \frac{(1,02)^8 - (0,96)^8}{1,02 - 0,96}$.

Итак, если предположения оправдаются, через 8 лет в этом городе будут проживать 183253 человек.

4. Для того чтобы разобраться в следующей ситуации, используем самый простой и популярный вариант уравнения (1) — уравнение

$x_n = ax_{n-1} + f$. Понятно, что ее решение есть функция $x_n = a^n x_0 + f \frac{a^n - 1}{a - 1}$, являющаяся частным случаем (3G) при $q = f;\ r = 1$.

Задача 4.

Рассказывают, что некоторое время Ходжа Насреддин работал учителем в школе. В один из дней, он задал своим ученикам на дом следующую задачу.

Волка наняли пасти овец. В итоге, через месяц отара уменьшилась на 40% и еще 6,4 овцы. То же происходило в последующие месяцы. Сколько овец было в начале, если через 5 месяцев осталось 227 овец?

На следующий день в школу пришла группа возмущенных родителей. Они говорили: «Конечно, мы понимаем, что это математическая задача. Но даже в них должен быть какой-то смысл. Как это отара овец может уменьшиться на 6,4 овцы?» В ответ, Насреддин сказал, что все с этой задачей в порядке. И предложил этим родителям следующую сделку: если в задаче ошибка, то он целый год будет работать без оплаты, а если все в порядке, то каждый из них приведет ему по овце.

Как Вы думаете, чем закончилась эта история?

Решение.

На первый взгляд Ходжа не прав: количество овец в отаре всегда целое число –

поэтому, числа 6,4 овцы быть не может. Но не будем торопиться, и проведем математический анализ ситуации. Обозначив через x_n количество овец в конце месяца с номером n, получим разностное уравнение $x_n = 0{,}6x_{n-1} - 6{,}4$ и условие $x_5 = 227$.

Далее, разделим уравнение на $(0,6)^n$, и введем обозначения $\frac{x_k}{(0,6)^k} = u_k$; $\frac{6,4}{(0,6)^k} = a(k)$. Тогда, воспользовавшись ЛЕММОЙ, получим:

$$u_5 - u_0 = 6{,}4\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{0{,}6}\right)^k \Leftrightarrow \frac{x_5}{(0{,}6)^5} - x_0 = \frac{6{,}4}{0{,}6}\cdot\frac{(1/0{,}6)^5 - 1}{(1/0{,}6) - 1} \Leftrightarrow x_5 = x_0(0{,}6)^5 + 6{,}4\frac{1-(0{,}6)^5}{1-0{,}6} \Leftrightarrow$$

$$227 = x_0(0{,}6)^5 + 16(1-(0{,}6)^5 \Leftrightarrow x_0 = 241{,}75584 / 0{,}07776 = 3109.$$

Итак, из наших вычислений следует, что первоначально в отаре было 3109 овец. Последовательно подставляя значения в уравнение (2), приходим к неожиданному выводу: задача Ходжи Насреддина очень даже правдоподобна, так как в отаре было после

1-го месяца: $x_1 = 0{,}6\cdot 3109 - 6{,}4 = 1859$ овец

2-го месяца: $x_2 = 0{,}6\cdot 1859 - 6{,}4 = 1109$ овец,

3-го месяца: $x_3 = 0{,}6\cdot 1109 - 6{,}4 = 659$ овец,

4-го месяца: $x_4 = 0{,}6\cdot 659 - 6{,}4 = 389$ овец,

5-го месяца: $x_5 = 0{,}6\cdot 389 - 6{,}4 = 227$ овец.

5. Продолжим изучать уравнение $x_n = ax_{n-1} + b(n)$.

Задача 5

Темир в конце каждого года добавляет на счет $500, Айдана в конце

1-го года снимает со счета $1000, в каждый последующий год на 5% больше, чем в предыдущий. Сколько денег будет на их совместном счете через 12 лет, если ставка интереса 10%, а в начальный момент времени на счете $5000?

Решение

Обозначим через x_n количество денег на счете в конце года с номером n и переведем задачу на язык математики:

$$x_n = (1 + 0{,}10)x_{n-1} + 500 – 1000(1 + 0{,}05)^{n-1};\ x_0 = 5000;\ x_{12} = ?$$

Конечно, можно сказать, что мы не умеем решать такие уравнения. Но это только на первый взгляд. В данном случае, в уравнении $x_n = ax_{n-1} + b(n)$ слагаемое $b(n)$ имеет вид $b_1(n) + b_2(n)$. Повторив выкладки, которые привели к формуле (3), получим, что решение имеет вид

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_1(k) + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_2(k). \qquad (3S)$$

Следовательно, решение задачи:

$$x_{12} = (1{,}1)^{12}5500 + 500\frac{(1{,}1)^{12} - 1}{0{,}1} - 1000\frac{(1{,}1)^{12} - (1{,}05)^{12}}{1{,}1 - 1{,}05} =$$

$$= 17261{,}36 + 10692{,}14 - 26851{,}44 = 1102{,}06.$$

Следствие

Если в уравнении $x_n = ax_{n-1} + b(n)$ слагаемое $b(n)$ имеет вид

$b_1(n) + b_2(n) + \ldots + b_m(n)$, решение запишется в виде

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_1(k) + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_2(k) + ... + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_m(k).$$

Итак, решение будет иметь общую часть $a^n x_0$ и слагаемые, определяемые конкретным видом функций $b_j(n)$, составляющих функцию $b(n)$.

6. Рассмотрим более общий вариант задачи из предыдущего раздела.

Задача 6

Настя предлагает модель, согласно которой ВВП страны на 70% определяется ВВП прошлого года. К этому значению добавляются величины инвестиций и экспорта, и вычитается величина импорта. Каким будет ВВП через 5 лет, если исходное ВВП равно 500, по итогам первого года инвестиции равнялись 135, экспорт 45, импорт 42? Предполагается, что ежегодно инвестиции будут расти на 5%, экспорт — на 3%, а величина импорта будет неизменной.

Решение.

Обозначим через Y_n величину валового внутреннего продукта в год с номером n. Тогда,

$$Y_n = 0{,}70Y_{n-1} + 135(1 + 0{,}05)^{n-1} + 45(1 + 0{,}03)^{n-1} - 42; \; Y_0 = 500; \; Y_5 = ?$$

Поэтому, решение задачи:

$$Y_5 = (0{,}7)^5 500 + 135\frac{(1{,}05)^5 - (0{,}7)^5}{0{,}35} + 45\frac{(1{,}03)^5 - (0{,}7)^5}{0{,}33} - 42\frac{1-(0{,}7)^5}{0{,}3} =$$

$$= 84{,}035 + 427{,}453 + 135{,}164 - 116{,}47 = 530{,}2.$$

Заключение

Разностные уравнения являются замечательным инструментом моделирования явлений природы и общественной жизни [4-6]. Их ценность повышается относительной простотой и удобством в использовании. В данной работе рассмотрен ряд задач, при решении которых используются разностные уравнения. Среди них есть, как чисто математические, о вычислении суммы элементов числовой последовательности, так и задачи на применение математики в демографии, экономической теории, … . Надеемся, что особый интерес вызовет история, главным героем которой мы выбрали литературного героя всех тюркских народов Ходжу Насреддина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bailey, D. Mathematics in Economics [Текст] / D. Bailey — McGraw-Hill, Inc, Bercshire, England, 1998. — 485 p.

2. Guterman, M.M., Nitecki, Z.H., Differential Equations. A Fist Course. [Текст]/ M.M. Guterman, Z.H. Nitecki - Philadelphia: Saunders College Publishing, 1988. — 689 p.

3. Томас, Р. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности [Текст] / Р. Томас — М.: ДиС, 1999. — 432с.

4. Sydsaeter K., Hammond P.J. Mathematics for economic analysis. Pearson Education India, 2002. — 800 p.

5. Камчыбеков Т.К., Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б. Основы финансовых и инвестиционных расчетов. – Бишкек: Аркус, 2017. —176 с.

6. Kydyraliev S.K., Urdaletova A.B., Doolotova A.A. Introduction to linear difference equations. Chapter in book Advances in Mathematics Research. Nova Science Publishers. V. 32. USA. 2022. 111-128 pp.