УДК 517.968.22
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_103

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Каракеев Таалайбек Тултемирович, д.ф.-м.н., профессор,
ttkarakeev@gmail.com
Эсенаманова Гулжан Кубановна, ст. преподаватель,
gggg gggg 74@inbox.ru
Кыргызский Национальный Университет им. Ж.Баласагына
Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация. *В работе исследованы вопросы регуляризации нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций. Обоснован метод регуляризации лаврентьевского типа, доказана сходимость регуляризованного решения к точному решению по равномерной метрике и единственность решения уравнения в пространстве непрерывных функций.*

Ключевые слова*: регуляризация, уравнение Вольтерра, равномерная сходимость, малый параметр.*

ЭКИ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРАНЫН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Таалайбек Тултемирович, ф.-м.и.д., профессор,
ttkarakeev@gmail.com
Эсенаманова Гулжан Кубановна, ага окутуучу,
gggg gggg 74@inbox.ru
Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети
Бишкек, Кыргыз Республикасы

Аннотация. *Макалада эки көз карандысыз өзгөрүлмөлүү үчүнчү түрдөгү Вольтерранын сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерин үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде регулярдоо маселеси изилденет. Лаврентьевдик типтеги метод негизделген, регулярдалган чыгарылыштын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу жана теңдеменин чыгарылышынын үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде жалгыздыгы далилденген.*

Ачкыч сөздөр*: регулярдоо, Вольтерранын теңдемелери, бир калыпта жыйналуу, кичи параметр.*

REGULARIZATION OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS THE THIRD KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

Karakeev Taalaibek Tultemirovich, Dr Sc, professor,
ttkarakeev@gmail.com
Esenamanova Guljan Kubanovna, teacher,
gggg gggg 74@inbox.ru
Kyrgyz National University J. Balasagyn
Bishkek, Kyrgyz Republic

Abstract*. In this work, questions of regularization of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the third kind in the space of continuous functions are studied. The method of regularization of the Lavrentiev type is substantiated, the convergence of the regularized solution to the exact solution with respect to the uniform metric and the uniqueness of the solution of the equation in the space of continuous functions are proved.*

Key words*: regularization, Volterra equation, uniform convergence, small parameter.*

В работах [1-3, 10] исследованы вопросы регуляризируемости интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В [1,5-8] одним из существенных условий для построения регуляризированных уравнений, которые обладают свойством вольтерровости и относятся к методам лаврентьевского типа [9, С.49] является свойство монотонности известной функции $p(x)$ при искомой функции вне интеграла. Целью данного исследования является изучение возможности распространение метода регуляризации лаврентьевского типа на случай интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными и оператором умножения на непрерывную функцию $p(x,y)$, которая является неубывающей либо невозрастающей по x функцией при всех y из заданного отрезка.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x,y)u(x,y)+\int_0^x K(x,y,s)u(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q_0(x,y,s,\tau,u(s,\tau))d\tau ds=g(x,y), \quad (1)$$

где известные функции $p(x,y)$, $K(x,y,s)$, $Q_0(x,y,s,\tau,u)$, $g(x,y)$ подчиняются условиям:

$K(x,y,s)\in C(D_0), K(x,y,x)\geq 0, D_0=\{(x,y,s)/0\leq s\leq x\leq b, 0\leq y\leq c\}$;

$G(x,y)\geq d_1>0, G(x,y)=C_0p(x,y)+K(x,y,x), 0<d_1, C_0=const$;

$Q_0(x,y,s,\tau,u)\in C(D_1\times R), D_1=\{(x,y,s,\tau)/\ 0\leq s\leq x\leq b,\ \ 0\leq\tau\leq y\leq c\}$,

$Q_0(x,y,x,\tau,u)=0, g(x,y),\ \ p(x,y)\in C(D), D=[0,b]\times[0,c]$.

Пусть I- тождественный оператор, J- оператор Волтерра: $Jv=\int_0^x v(s,y)ds$. Действуя оператором $I+C_0J$ на уравнение (1) получим уравнение вида

$$\begin{aligned}&p(x,y)u(x,y)+\int_0^x G(s,y)u(s,y)ds=\\&=\int_0^x L(x,y,s)u(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau,u(s,\tau))d\tau ds+f(x,y),\end{aligned} \quad (2)$$

где

$L(x,y,s)=K(s,y,s)-K(x,y,s)-C_0\int_s^x K(\nu,y,s)d\nu$,

$Q(x,y,s,\tau,u(s,\tau))=-Q_0(x,y,s,\tau)-C_0\int_s^x Q_0(\nu,y,s,\tau,u(s,\tau))d\nu$,

$f(x,y)=g(x,y)+C_0\int_0^x g(s,y)ds$.

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\begin{aligned}&(\varepsilon+p(x,y))u_\varepsilon(x,y)+\int_0^x G(s,y)u_\varepsilon(s,y)ds=\int_0^x L(x,y,s)u_\varepsilon(s,y)ds+\\&+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau))d\tau ds+\varepsilon u(0,y)+f(x,y).\end{aligned} \quad (3)$$

Воспользуемся резольвентой

$$-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)G(s,y)$$

ядра $\left(-G(s,y)/\left(\varepsilon+p(x,y)\right)\right)$ и, уравнение (3) приведем к следующему эквивалентному виду

$$\begin{aligned}&u_\varepsilon(x,y)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.\\&u_\varepsilon(\nu,y)d\nu-\int_0^x L(x,y,\nu)u_\varepsilon(\nu,y)d\nu+\int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau,u_\varepsilon(\nu,\tau))d\tau d\nu-\\&\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau,u_\varepsilon(\nu,\tau))d\tau d\nu+f(s,y)-f(x,y)\right\}ds+\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\times\\&\exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)u_\varepsilon(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau))d\tau ds+f(x,y)\right\}.\end{aligned} \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть для всех $0 \le s \le x \le b,\ 0 \le \tau \le y \le c$ функция $v(x,y)$ неотрицательна и удовлетворяет неравенству

$$v(x,y) \le c_1 + c_2 \int_0^x v(s,y)ds + c_3 \int_0^x \int_0^y v(s,\tau)d\tau ds,$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные, $c_1 > 0, c_2 \ge 0, c_3 \ge 0$. Тогда

$$v(x,y) \le c_1 \exp\big(x(c_2 + c_3 y)\big).$$

Пусть выполняются следующие условия

д) $g(0,y) = p(0,y) = 0,\ p(x,y) > 0,\ \forall x \in (0,b], \forall y \in [0,c], p(x,y)$ – неубывающая по *x* функция в области D;

ж) $M_1 = C_0 L_K + L_{K1},\ L_K = Lip(K(x,y,s)|x),\ L_{K1} = Lip(K_x(x,y,s)|x),$

$$|Q_0(x,s,u) - Q_0(x,s,\omega) - Q_0(y,s,u) + Q_0(y,s,\omega)| \le L_Q(x-y)|u-\omega|.$$

Для оператора $(H_\varepsilon u)(x,y)$, заданного в виде

$$\begin{gathered}(H_\varepsilon u)(x,y) \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x,y)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right)\big[u(0,y) - u(x,y)\big] - \\ - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \big[u(s,y) - u(x,y)\big] ds,\end{gathered} \tag{5}$$

имеет место [1]

Лемма 2. При выполнении условий *а) - д)* для $u(x,y) \in C(D)$ имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)} \le 4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $\|\cdot\|_{C(D)} = \max\limits_{D} |\cdot|,\ \omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{\substack{|x-s| \le \varepsilon^\beta \\ y \in [0,c]}} |u(x,y) - u(s,y)|, \qquad 0 < \beta < 1.$

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а*) – *ж*), и уравнение (1) имеет решение $u(x,y) \in C(D)$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (2). При этом имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{C(D)} \le M_2 \left(4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\right),$$

$M_2 = \exp\big(bM_0(1+c)\big), M_0 = \big(M_1 + L_Q\big) d_1^{-1} (2 + e^{-1}).$

Доказательство. Положим $\eta_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)$, где $u(x,y)$ – решение уравнения (1). Тогда из (5) получим следующее уравнение

$$\begin{gathered}\eta_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \left\{\int_0^s L(s,y,\nu) \times\right. \\ \times \eta_\varepsilon(\nu,y) d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu) \eta_\varepsilon(\nu,y) d\nu + \int_0^s \int_0^y Q\big(s,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\big) d\tau d\nu - \\ \left. - \int_0^x \int_0^y Q\big(x,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\big) d\tau d\nu + \varepsilon\big(u(s,y) - u(x,y)\big)\right\} ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y) d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right) \left\{\int_0^x L(x,y,s) \eta_\varepsilon(s,y) ds + \right. \\ \left. + \int_0^x \int_0^y Q\big(x,y,s,\tau,\eta_\varepsilon(s,\tau)\big) d\tau ds + \varepsilon\big[u(0,y) - u(x,y)\big]\right\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Так как $p(x,y)$ неубывающая по *x* в области D, то при $\nu \le x$

$$\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} \le \frac{1}{\varepsilon+p(\nu,y)}, (x,y) \in D .$$

Тогда используя условие $G(x,y) \ge d_1, (x,y) \in D$, для функции

$$B_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} (x-s)ds$$

получим

$$|B_\varepsilon(x,y)| \le d_1^{-1} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} \int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)} d\nu\, ds =$$

$$\left| W_\varepsilon(x,y,s) = \int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)} d\nu \right| = d_1^{-1} \int_0^{W_\varepsilon(x,y,0)} e^{-\rho}\rho d\rho < d_1^{-1} \int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho = d_1^{-1}.$$

Так как

$$|L(x,y,\nu) - L(s,y,\nu)| \le M_2(x-s),$$

то в силу ж) имеем

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} \left\{ \int_0^s L(s,y,\nu) \times \right.\right.$$

$$\times \eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s \int_0^y Q\big(s,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\big)\, d\tau d\nu -$$

$$\left.\left. \int_0^x \int_0^y Q\big(x,y,\nu,\tau,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\big)\, d\tau d\nu \right\} ds \right| \le 2\big(M_2 + L_Q\big)|B_\varepsilon(x,y)| \left\{ \int_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\, d\nu + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \int_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\, d\tau d\nu \right\};$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right) \left\{ \int_0^x L(x,y,s)\, \eta_\varepsilon(s,y)ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^x \int_0^y Q\big(x,y,s,\tau,\eta_\varepsilon(s,\tau)\big)d\tau ds \right\} \right| \le \big(M_2 + L_Q\big) \frac{d_1^{-1}}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x G(\nu,y)d\nu \times$$

$$\times exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x G(\nu,y)d\nu\right) \left\{ \int_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\, d\nu + \int_0^x \int_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\, d\tau d\nu \right\} \le$$

$$\le \big(M_2 + L_Q\big) d_1^{-1} e^{-1} \left\{ \int_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\, d\nu + \int_{0,}^x \int_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\, d\tau d\nu \right\},$$

$$\sup_{\rho \ge 0}[\rho e^{-\rho}] \le e^{-1}, \qquad \rho = \frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right).$$

В силу полученных оценок из (6) имеем

$$|\eta_\varepsilon(x,y)| \le M_0 \left\{ \int\limits_0^x |\eta_\varepsilon(\nu,y)|\, d\nu + \int\limits_0^x \int\limits_0^y |\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\, d\tau d\nu \right\} + \|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)},$$

где $M_0 = (M_2 + L_Q) d_1^{-1}(2 + e^{-1})$.

Отсюда, используя Лемму 2 получим оценку

$$|\eta_\varepsilon(x,y)| \le \exp\big(xM_0(1+y)\big)\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)}.$$

Следовательно, переходя к норме в $C(D)$ и используя оценку Леммы 2, при $\varepsilon \to 0$, получим, что регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,y) \to u(x,y)$ равномерно. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $\mathrm{C}(D)$.

Предположим, что

е) $p(b,y) = 0,\ p(x,y) > 0,\ \forall x \in [0,b), \forall y \in [0,c],\ p(x,y)$ – невозрастающая по x функция в области D.

Лемма 3. При выполнении условий *а)-г), е)* для функций $u(x,\tau) \in C(D)$, имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon v)(x,y)\|_C \le d_2(\varepsilon \mathrm{p}^{-1}(0) + (d_1\theta_2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta})\|u(x,y)\|_{C(D_0)} + d_3\omega_v(\varepsilon^\beta),$$

где $d_2 = 4 + 2M_0\ d_3 = 1 + \theta_2^{-1}, \theta_2 = 1 - \theta_1, 0 < \theta_1 < 1,$

$\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta} |u(x,y) - u(t,y)|, \quad 1/2 \le \beta < 1.$

Теорема 2. Пусть выполняются условия *а)-г), ж-е)* и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau) \in C(D)$. Тогда решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$ и имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{C(D)} \le$$
$$\le C_2\left(d_2\big(\mathrm{p}^{-1}(0,y)\varepsilon + (d_1\theta_2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\big)\|u(x,y)\|_{C(D_0)} + d_3\omega_u(\varepsilon^\beta)\right),$$

где d_2, d_3, $\omega_u(\varepsilon^\beta)$ - определяются также как в лемме 1, $0 < C_2 = const$.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 решение уравнения (1) единственно в $C(D)$.

Литература

1. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода[Текст] / А.Асанов, Г.Ободоева //Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып.25. – С.65–74.

2. Бухгейм А.Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи [Текст] / А.Л.Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.

3. Булатов М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 330–335.

4. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода[Текст] / Я.Янно //Учен. зап. Тартуск. гос. ун–та, 1987. – Вып.762. – С.16–30.

5. Глушак А.В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу[Текст] / А.В.Глушак, Т.Т.Каракеев // ЖВМиМФ. – 2006. – Т.46.-№ 5. – С. 848-857.

6. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Т.Т.Каракеев //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. -Бишкек: Илим, 2003. – Вып.32. – С.179-183.

7. Омуров Т.Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач[Текст] / Т.Д.Омуров, Т.Т.Каракеев. Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.

8. Karakeev T.T. Regularization of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the Third Kind [Текст] / T.T.Karakeev // Lobachevskii J. of Mathematics, 2020, 41 (9), P.1816–1821.

9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.– 287 с.

10. J.Cerha. A note on Volterra integral equations with degenerate kernel [Text] / J.Cerha// Comment, math. Univ. carol., 1972, 13, № 4, P.659-672