

МАТЕМАТИКА

УДК 532.546

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_124

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИЯ И ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА В
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДВУХЗОННОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ
НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

*Сулаймонов Фозил Уралович, PhD, ст. преподаватель
fozil.sulaymonov@mail.ru*

*[Абдукодирова Мохира Исмоил кизи, магистр,
mokhiraburkhonova99@gmail.com](mailto:mokhiraburkhonova99@gmail.com)*

*Джизакский государственный педагогический университет,
130100, Джизак, Узбекистан*

Аннотация: В статье рассматривается задача переноса и фильтрации в двухзонной цилиндрической пористой среде с неоднородным полем скоростей. На основе уравнения пьезопроводности анализируются различные параметры коэффициентов проницаемости линии уровня давления, скорости фильтрации и линии уровня относительной концентрации. Исследовано влияние изменения коэффициентов проницаемости и диффузии на растворенное вещество и фильтрацию флюида.

Ключевые слова: пористая среда, вещества, неоднородная жидкость, макропора, микропора, поля давления, поля скорости, фильтрация.

**MODELING FILTRATION AND SOLUTE TRANSPORT IN A
CYLINDRICAL TWO-ZONE MEDIUM WITH ALLOWANCE FOR THE
INHOMOGENEITY OF THE FIELD OF FILTRATION RATES**

*Sulaymonov Fozil Uralovich, PhD, senior teacher
fozil.sulaymonov@mail.ru*

*Abdukodirova Mohira Ismoil kizi, master,
mokhiraburkhonova99@gmail.com*

*Jizzakh State Pedagogical University,
130100, Jizzakh, Uzbekistan*

Abstract: In the paper deals with the problem of transport and filtration in a two-zone cylindrical porous medium with an inhomogeneous velocity field. On the basis of the equation of piezoconductivity analyzed by various parameters of the permeability coefficients of the pressure level line, the filtration rate and the line of the level of relative concentration. The influence of changes in the permeability and diffusion coefficients on the solute and filtration of the fluid was studied.

Keywords: porous medium, substances, inhomogeneous liquid, macropore, micropore, pressure fields, velocity fields, filtration.

1. ВВЕДЕНИЕ

При переносе вещества в неоднородных пористых средах образуется неоднородное поле скоростей фильтрации, что существенно влияет на конвективные и диффузионные составляющие общего переноса [1,2,3,4]. Неоднородность среды при

моделировании процесса может быть учтена различными способами. Одним из возможных путей являются конкретизация зон среды с различными фильтрационно-ёмкостными характеристиками. При этом учитывается геометрия этих зон. В частности, могут быть рассмотрены среды в виде коаксиальных цилиндров с различными характеристиками [5,6,7]. В данной работе рассматривается перенос вещества в такой среде с учетом неоднородного распределения поля скоростей.

2. ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ

Рассматривается цилиндрическая пористая среда с радиусом b с цилиндрической “макропорой” (пористая среда с высокой проницаемостью) в центре с радиусом a (Рис.1). Таким образом, область исследования задачи состоит из двух частей, $\Omega_1 \{(r, x); 0 \leq x < \infty, 0 \leq r \leq a\}$ и $\Omega_2 \{(r, x); 0 \leq x < \infty, a \leq r \leq b\}$, которые отличаются друг от друга фильтрационно-ёмкостными свойствами. С точки $(0, 0)$ подается жидкость с постоянным давлением $p_c = \text{const}$. При этом в среде образуется неоднородное двумерное распределение скоростей фильтрации и давления. Первоначально в среде было постоянное давления p_0 , $p_0 < p_c$.

Предположим, что внешняя цилиндрическая область Ω_2 имеет проницаемость k_2 , а внутренняя Ω_1 - k_1 , где $k_2 \ll k_1$. Внешняя боковая поверхность цилиндрической пористой среды Ω_2 не проницаема. Необходимо определить распределение давления, поле скоростей фильтрации, концентрацию вещества в цилиндрических областях в различные моменты времени. В отличие от двухзонного подхода [8,9] здесь в малопроницаемой зоне Ω_2 жидкость считается подвижной, но с малыми скоростями фильтрации.

Компоненты скорости фильтрации в Ω_1 и Ω_2 определяются как

$$v_{1x} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad v_{1r} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (r, x) \in \Omega_1, \quad (1)$$

$$v_{2x} = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad v_{2r} = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad (r, x) \in \Omega_2, \quad (2)$$

где p_1, p_2 – давления в областях Ω_1, Ω_2 , μ – коэффициент вязкости вещества.

Для определения давления в областях Ω_1, Ω_2 используем уравнение пьезопроводности [1,11]

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \chi_1 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \right\}, \quad (r, x) \in \Omega_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \chi_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \right\}, \quad (r, x) \in \Omega_2, \quad (4)$$

$$\chi_1 = \frac{k_1}{\mu \beta_1^*}, \quad \chi_2 = \frac{k_2}{\mu \beta_2^*},$$

χ_1, χ_2 – коэффициенты пьезопроводности, β_1^*, β_2^* – коэффициенты упругоёмкости среды ($\beta_1^* = \theta_1 \beta_{жс} + \beta_{c_1}$, $\beta_2^* = \theta_2 \beta_{жс} + \beta_{c_2}$), $\beta_{жс}$ – коэффициент объемной упругости жидкости, θ_1, θ_2 – пористости среды Ω_1 и Ω_2 , β_{c_1}, β_{c_2} –

коэффициенты объемной упругости сред Ω_1 и Ω_2 .

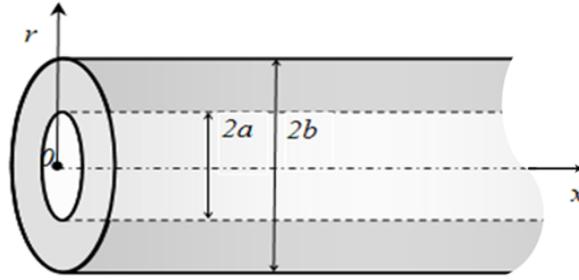


Рис.1 Схема области фильтрации

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$(5) \quad p_1(0, r, x) = p_2(0, r, x) = p_0, p_0 = \text{const} \quad p_1(t, 0, 0) = p_c, p_c = \text{const}, p_c > p_0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}(t, r, 0) = 0, \quad 0 < r \leq a \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}(t, r, \infty) = 0, \quad 0 < r \leq a \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r}(t, 0, x) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}(t, r, 0) = 0, \quad a < r \leq b \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}(t, r, \infty) = 0, \quad a < r \leq b \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial r}(t, b, x) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (12)$$

$$(13) \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial r}(t, a, x) = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial r}(t, a, x), \quad 0 \leq x < \infty \quad p_1(t, a, x) = p_2(t, a, x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (14)$$

Система уравнений (1) – (4) с начальными и граничными условиями (5) – (14) позволяют определить поле давлений, скоростей фильтрации.

Для решения задачи (1) – (14) применим метод конечных разностей [10].

В области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ введем конечно – разностную сетку

$$\Omega_{\tau h_1 h_2} = \left\{ (t_k, x_i, r_j), t_k = \tau k, \tau = \frac{T}{K}, k = \overline{0, K}, x_i = i h_1, h_1 = \frac{L}{I}, i = \overline{1, I}, \right. \\ \left. r_j = j h_2, h_2 = \frac{a}{S}, j = \overline{1, S}, r_j = j h_2, h_2 = \frac{b-a}{J-S}, j = \overline{S+1, J} \right\}, \quad (15)$$

где τ - шаг сетки по времени, h_1 - шаг сетки по направлению x , h_2 - шаг сетки по направлению r , T - максимальное время, в течении которого исследуются процесс, S - количество интервалов по радиусу в макропоре, R - радиус окружающей среды, L - длина цилиндра, K - количество интервалов сетки по времени, I - количество интервалов по длине, J - общее количество интервалов по радиусу для среды.

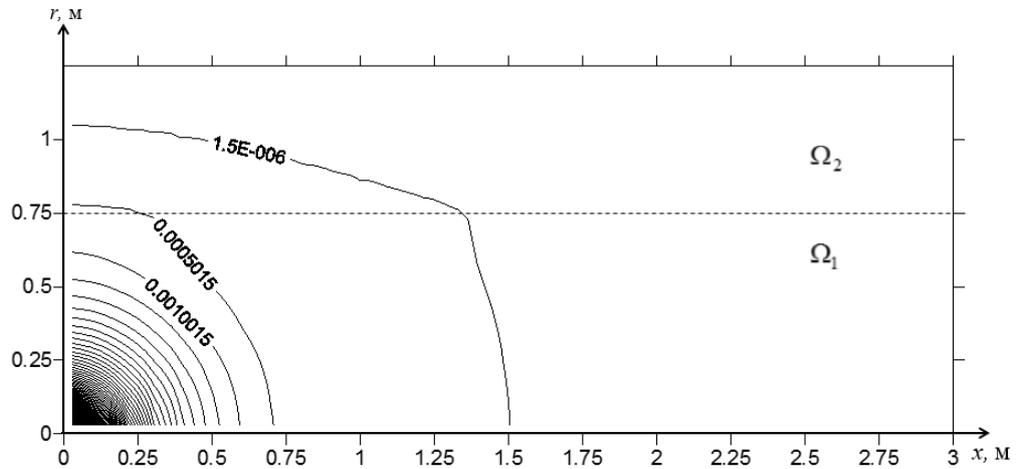
3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе численного решения задачи проведена серия вычислительных экспериментов при следующих значениях исходных параметров: $\mu = 10^{-1}$ Па·с, $\beta^* = 10^{-9}$ Па⁻¹, $k_1 = 10^{-14} \div 2,5 \cdot 10^{-14}$ м², $k_2 = 10^{-15} \div 2,5 \cdot 10^{-15}$ м², $p_c = 1,5 \cdot 10^5$ Па, $p_0 = 0$ Па, $T = 2700$ с, $h_1 = 0,1$ м, $h_2 = 0,05$ м, $\tau = 1$ с, $a = 0,75$ м, $b = 1,25$ м.

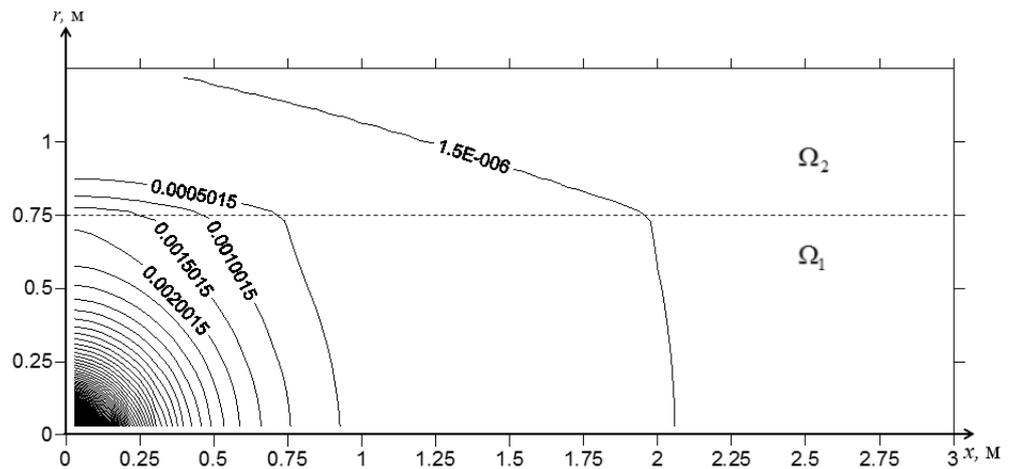
На рис.2 отражены изобары при временах $t = 900$ (а), 1800 (б) и 2700 (в) с. Как

видно из рисунка, в области Ω_1 давление растет заметно быстрее чем в Ω_2 . Изгиб линий показывает, что в окружающей среде Ω_2 процесс идет медленнее, чем в макропоре. Такая же картина наблюдается и для распределения скоростей.

a)



б)



в)

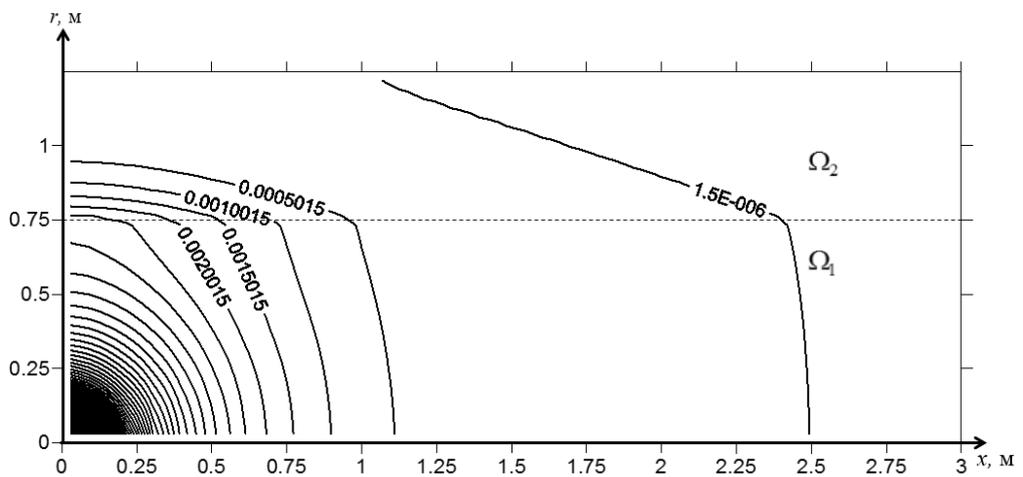


Рис.2. Изобары (МПа) при $t=900$ (a), 1800 (б), 2700 (в) с, $k_1=10^{-14} \text{ м}^2$, $k_2=10^{-15} \text{ м}^2$,
(Верхняя половина вертикального сечения области Ω).

На рис.3 представлены линии уровня давления при увеличении значений коэффициента проницаемости в 2,5 раза для одного значения времени, $t=900$ с. Сравнивая результаты, представленные на рис.2(a) и 3 можно заметить, что увеличение значений

коэффициентов проницаемости k_1 и k_2 приводит к ускорению продвижения фронта давления. На рис.4 представлены линии уровня скоростей фильтрации для двух пар значений k_1 и k_2 . Сравнивая рис.4(а) с рис.4(б) можно заметить, что увеличение проницаемости приводит к увеличению скорости фильтрации. Исходя, из этого можно сделать вывод о значительности влияния проницаемости на распределение давления и скорости вещества в пористой среде.

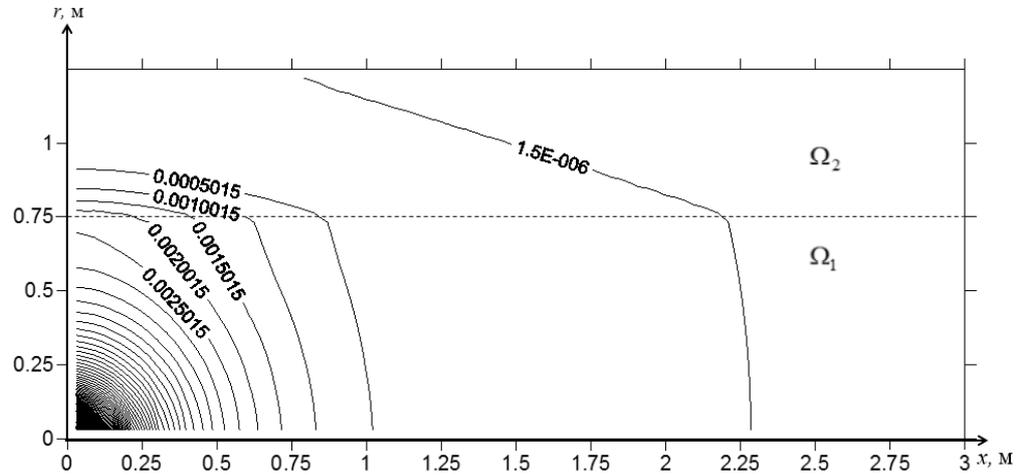
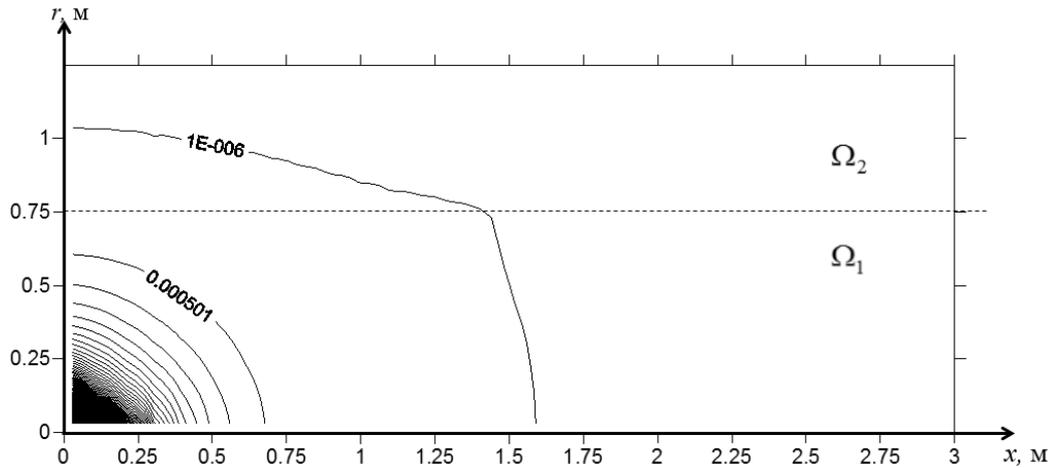


Рис.3. Изобары (МПа), $t = 900\text{с}$, $k_1 = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{м}^2$, $k_2 = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{м}^2$.
(Верхняя половина вертикального сечения области Ω).

а)



б)

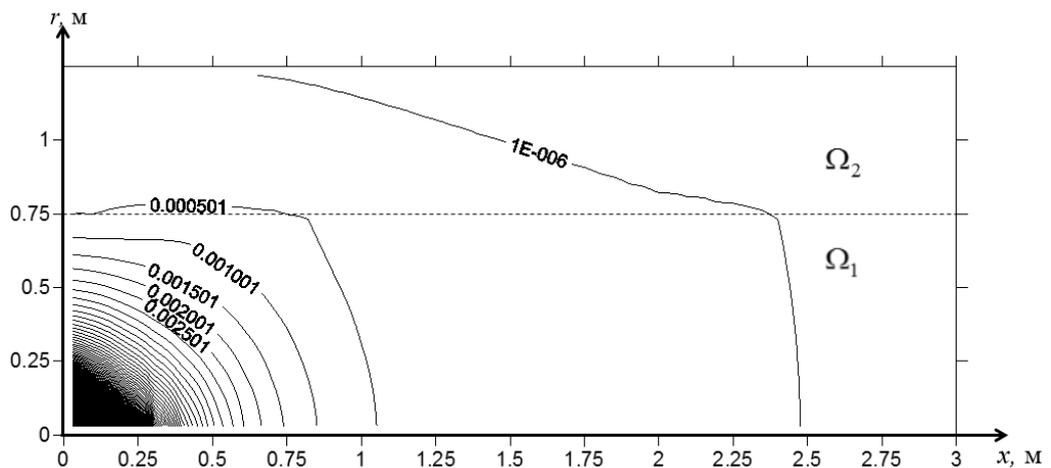


Рис.4. Линии уровня скорости фильтрации $v \cdot 10^6$ (м/с), $t = 900\text{с}$,

$$k_1 = 10^{-14} \text{ м}^2, k_2 = 10^{-15} \text{ м}^2 \text{ (a)}, k_1 = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2, k_2 = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2 \text{ (б)}.$$

(Верхняя половина вертикального сечения области Ω).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bear J., Dynamics of fluids in porous media, 1972, NY: Elsevier.
2. Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Издательство «ФАН». Ташкент 2012. - 280 с.
3. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Математические модели фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах. Издательство «ФАН». Ташкент 2014. - 280 с.
4. Clark M. M. Transport Modelling for Environmental Engineers and Scientists, John Wiley, New York, 1996.
5. Van Genuchten M.Th., Tang D.H., Guennelon R., Some exact solutions for solute transport through soils containing large cylindrical macropores // Water Resources Research. 1984. Vol. 20, № 3. Pp. 335-346.
6. Haws N. W., M. R. Paraskewich Jr., M. Hilpert, W. P. Ball, Effect of fluid velocity on model-estimated rates of radial solute diffusion in a cylindrical macropore column, Water Resour. Res., Amer. J. 2007. 43, W10409
7. M. M.Rahman, R. Liedl, P. Grathwohl, Sorption kinetics during macropore transport of organic contaminants in soils: Laboratory experiments and analytical modeling, Water Resour. Res., 40, Amer. J. 2004. W01503
8. Coats K.H., Smith B.D., Dead-end volume and dispersion in porous media, Society of Petroleum Engineering Journal, 1964, 4(1), 73-84.
9. Gaudet J.P., Jégat H., Vachaud G., Wierenga P.J., Solute transfer, with exchange between mobile and stagnant water, through unsaturated sand, Soil Sci. Soc. Amer. J., 1977, 41(4), 665-671.
10. Alexander A.Samarskii, 2001, The theory of difference schemes, // Pure and applied mathematics // Marcel Dekker Inc, New York. 2001. 788 p.
11. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Kluwer Academic Publisher, 1990. – 395 pp.