УДК 517.954
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_90

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович, д.ф.-м.н., доцент
kadirkulovbj@gmail.com
Ташкентский государственный университет востоковедения,
Ташкент, Узбекистан
Эргашев Окилжон Тухтасин угли, ассистент,
okiljonergashev@gmail.com
Национальный исследовательский университет Ташкентский институт инженеров ирригации и мелиорации сельского хозяйства,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе для вырождающегося параболического уравнения дробного порядка с оператором Герасимова-Капуто изучается нелокальная обратная задача типа Бицадзе-Самарского. Для решения задачи используется спектральный метод, с помощью которого рассматриваемая задача сводится к исследованию спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно пространственной переменной. Исследованы спектральные вопросы полученной, а также сопряженной задачи, при этом дифференциальный оператор, соответствующий сопряженной задаче, получается разрывным. Найдены собственные числа, а также собственные функции задач, доказана полнота, а также базисность Рисса полученных систем. Далее, при определенных условиях на заданные функции, доказаны теоремы о единственности и существования решения поставленной задачи. При доказательстве единственности решения задачи используется полнота системы собственных функций, соответствующей спектральной задачи, а решение задачи представляется в виде абсолютно и равномерно сходящего ряда.*

Ключевые слова: *обратная задача, оператор Герасимова-Капуто, уравнение дробного порядка, базис Рисса, сопряженная задача.*

ON AN INVERSE PROBLEM OF THE BITSADZE-SAMARSKY TYPE FOR PARABOLIC EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Kadirkulov Baxtiyor Jalilovich, DSc, docent,
kadirkulovbj@gmail.com
Tashkent State University of Oriental Studies
Tashkent, Uzbekistan
Ergashev Okiljon Tuxtasin o'g'li, assistant
okiljonergashev@gmail.com
The Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural
Mechanization Engineers - National Research University
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we study a nonlocal inverse problem of the Bitsadze-Samarskii type for a degenerate parabolic equation of fractional order with the Gerasimov-Caputo operator. The spectral method is used to solve the problem. Using this method, the problem under consideration is reduced to the study of a spectral boundary value problem for a second-order ordinary differential equation with respect to a spatial variable. The spectral questions of the obtained problem, as well as of the adjoint problem, are investigated, and the differential operator corresponding to the adjoint problem is being discontinuous. Eigenvalues and eigenfunctions of the problems are found, completeness and the Riesz basis property of the obtaining systems are proved. Further, under certain conditions on the given functions, uniqueness and existence theorems for a solution to the posed problem are proved. When proving the uniqueness of the solution to the problem, we use the completeness of the system of eigenfunctions of the corresponding spectral problem, and construct the solution of the problem in the form of an absolutely and uniformly descending series.*

Key words: *inverse problem, Gerasimov-Caputo operator, equation of fractional order, Riesz basis, adjoint problem.*

1. Введение и постановка задачи (Introduction and problem statement). Среди первых имеющихся в литературе работ по нелокальным задачам можно назвать исследование, посвященное изучению нелокальных эллиптических краевых задач, принадлежащее Т. Карлеману [1]. Он рассмотрел задачу с нелокальным условием, заключающуюся в поиске голоморфной функции в ограниченной области, связывающей значения этой функции в разных точках границы. Эта задача была сведена к сингулярному интегральному уравнению с отклонением. Отметим также работы [2] и [3], в которых изучались абстрактные нелокальные эллиптические краевые задачи.

Нелокальная краевая задача нового типа для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована А.В.Бицадзе и А.А.Самарским [4]. Эта задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. С помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений, доказана единственность классического решения.

Далее, результаты по теории уравнений в частных производных и функционально-дифференциальных уравнений позволили исследовать проблему разрешимости для широкого класса нелокальных эллиптических краевых задач [5]. Аналогичные задачи для уравнений смешанного типа изучались в работах [6], [7].

Пусть $\Omega=\{(x,t):0<x<1,0<t<T\}$, $T>0$, ${}_C D_{0t}^{\alpha}=J_{0t}^{1-\alpha}\dfrac{d}{dt}, 0<\alpha\le 1$ - интегро-дифференциальный оператор Герасимова-Капуто, а J_{0t}^{ν} - интегральный оператор Римана-Лиувилля, которая определяется по формуле [8]

$$J_{0t}^{\nu}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}\varphi(\tau)d\tau, \nu>0.$$

В области Ω рассмотрим следующую обратную нелокальную задачу:

Задача *BS*. Требуется найти пару функций $(u(x,t),g(x))$ из класса

$$u,\ {}_C t^{-\beta} D_{0t}^{\alpha}u,\ u_{xx}\in C(\bar{\Omega}),\ \ g(x)\in C[0,1],$$

удовлетворяющую в области Ω уравнению

$$t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t)+g(x) \tag{1}$$

и условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), 0\le x\le 1,\ u(x,T)=\psi(x), 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\ 0\le t\le T,\ u(1,t)=u(x_0,t), 0\le t\le T. \tag{3}$$

Здесь $\varphi(x),\psi(x)$ - заданные функции, $\beta\ge 0, 0\le x_0<1$.

2. Спектральные свойства задачи *BS* (Spectral Properties of the *BS* Problem). Сначала изучим спектральные свойства задачи *BS*. Для этого рассмотрим однородное уравнение

$$t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t), \tag{4}$$

соответствующее к уравнению (1). Для решения задачи *BS* применим спектральный метод, согласно которому, нетривиальное частное решение задачи ищется в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Подставляя последнее в уравнение (4) и пользуясь условиями (3) для нахождения $X(x)$ получим следующую спектральную задачу

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=0, X(1)=X(x_0). \tag{5}$$

При $\lambda\le 0$ исследуемая задача имеет только тривиальное решение, а при $\lambda>0$ получим две серии собственных чисел

$$\lambda_{n_1} = \left(\frac{(2n-1)\pi}{1+x_0} \right)^2, \lambda_{n_2} = \left(\frac{2n\pi}{1-x_0} \right)^2, n \in N, \tag{6}$$

которым соответствуют собственные функции вида

$$X_{n_1}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{n_1}}x, X_{n_2}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{n_2}}x, n \in N. \tag{7}$$

Отметим, что среди двух серий собственных чисел из (6) имеются совпадающие. Действительно, приравнивая λ_{s1} и λ_{m2} из (6), получим соотношение между x_0, s и m:

$$x_0 = \frac{2s-2m-1}{2s+2m-1}, s, m \in N, s > m, \tag{8}$$

при этом, соответствующие значения λ_{s1} и λ_{m2} совпадают, так что система собственных функций (7) не будет полной и возникает проблема о дополнении этой системы с присоединенными функциями.

Впервые задача (5) исследована в работе [9], где показана полнота корневых функций дифференциального оператора, соответствующей к этой задаче. Спектральная задача вида (5) в более общей постановке исследована в работе [10], где найден более общий критерий базисности, позволяющий установить базисность Рисса корневых функций дифференциальных операторов в случае несамосопряженных задач.

Теперь, так как соотношение (8) зависит также от точки x_0, то выясним характер этой точки, тем самим уточным результаты вышеуказанных работ.

Ясно, что, когда x_0 иррациональное число из интервала (0,1), соотношение (8) не имеет место, значит, собственные числа и соответствующие собственные функции задачи (5) различны. Теперь остается выяснить характер рациональных чисел из этого интервала.

Следующий пример показывает, что (8) не имеет место и при некоторых рациональных значениях x_0. Действительно, рассмотрим случай $x_0 = \frac{1}{2}$. Тогда из (8) следует $2s = 6m+1$. В силу $m, s \in N$, число $6m+1$ всегда нечетное, а $2s$ - четное, то есть (8) не имеет место ни при каких $m, s \in N$. Значит, существуют рациональные дроби, при которых все собственные функции различны.

Теперь находим связь между значениями x_0, s и m, при которых справедливо равенство (8), а также даём алгоритм нахождения соответствующих значений $m, s \in N$. Имеет место:

Лемма 1. Пусть $x_0 \in (0,1)$ - рациональное число, такое, что $x_0 = \frac{p}{q}$, где $p < q$, а p и q - взаимно простые нечетные натуральные числа, причем $q - p$ кратное к 4. Тогда существует счетное число значений s и m, такие что для двух серий собственных чисел из (8) имеет место $\lambda_{s1} = \lambda_{m2}$.

Доказательство. Действительно, из условия на x_0, соотношение (8) примет следующий вид

$$s = \frac{m(p+q)}{q-p} + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

По условию, $q-p$ - кратное к 4, тогда оно представляется в виде $q-p=4r$, где $r\in N$. Отсюда $q=p+4r$. Тогда (9) принимает вид

$$s=\frac{m(p+2r)}{2r}+\frac{1}{2}. \qquad (10)$$

По условию, числа p,q нечетные. Тогда, очевидно, что число $p+2r$ также нечетное, а числа $p+2r$ и $2r$ не имеют общих делителей. Значит, условие $s\in N$ можно обеспечить только за счет значений m и, нетрудно видеть, что это имеет место только и только тогда, когда $m=k\cdot r$, где k -любое нечетное натуральное число. Действительно, при таких значениях m из (10) имеем

$$s=\frac{k(p+2r)}{2}+\frac{1}{2},$$

и так как $k(p+2r)$ -нечетное, отсюда следует, что $s\in N$.

Таким образом, для нахождения значений s и m, при которых (8) имеет место, получили следующие формулы

$$m=k\cdot r, s=\frac{m(p+q)}{q-p}+\frac{1}{2}, \qquad (11)$$

где $r=\dfrac{q-p}{4}$, $k=1,3,5,\ldots$. Лемма доказана.

Учитывая лемму 1 и формулу (8), интервал (0,1) разделим на два множества Q_1 и Q_2, где Q_2 содержит все рациональные x_0, удовлетворяющий условиям леммы 1, а Q_1 - все остальные.

Наряду с задачей (5) рассмотрим задачу, сопряженную к этой задаче

$$-Y''(x)=\lambda Y(x), x\in(0,x_0)\cup(x_0,1), \qquad (12)$$

$$Y(0)=Y(1)=0, Y(x_0+0)=Y(x_0-0), Y'(1)=Y'(x_0+0)-Y'(x_0-0). \qquad (13)$$

Отметим, что задача (12)-(13) корректна, то есть она не имеет лишних условий. Эту задачу надо рассмотреть, как две краевые задачи с условиями склеивания вида (13).

Переходим к нахождению собственных функций задач (5) и (12)-(13). Рассмотрим случай $x_0\in Q_1$. В этом случае получим две серии собственных чисел вида (6), которым соответствуют собственные функции вида (7), причём все эти функции разные и не ортогональные.

Задача (12), (13) при $x_0\in Q_1$ также имеет собственные числа вида (6). Решая эту задачу, нетрудно видеть, что собственные функции имеют вид

$$Y_{s1}(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sin\mu_{s1}x}{1+x_0}, & 0\le x\le x_0\\ \dfrac{2\sin\mu_{s1}(x-1)}{(x_0+1)\cos\mu_{s1}}, & x_0\le x\le 1\end{cases}, \quad Y_{m2}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le x_0\\ \dfrac{2\sin\mu_{m2}(x-1)}{(1-x_0)\cos\mu_{m2}}, & x_0\le x\le 1\end{cases}. \qquad (14)$$

Лемма 2. Системы функций (7) и (14) являются биортогональными, то есть имеет место

$$(X_{s1}(x),Y_{mj}(x))_{L_2(0,1)}=\begin{cases}1, s=m,\ j=1\\ 0, s\neq m,\ j=1,2\end{cases},(X_{s2}(x),Y_{mj}(x))_{L_2(0,1)}=\begin{cases}1, s=m,\ j=2\\ 0, s\neq m,\ j=1,2\end{cases}.$$

Доказательство леммы 2 проводят непосредственно с помощью вычисления соответствующих интегралов.

Лемма 3. Системы (7) и (14) образуют базис Рисса $L_2(0,1)$.

Отметим, что более подробную информацию о базисах Рисса можно найти в работах [11, 12].

Таким же образом исследуются вопросы базисности собственных функций для значений x_0 из Q_2. Отметим, что в этом случае задачи (5) и (12)-(13) имеют помимо собственных функций, ещё и присоединенные функции, соответствующие тем собственным значениям, порядковые номера которых, определяются по формулам (11).

3. Существование и единственность решения задачи *BS* при $x_0\in Q_1$ (Existence and uniqueness of a solution to the *BS* problem for $x_0\in Q_1$).

Переходим к исследованию существования и единственности решения задачи *BS*. Согласно теории, решение $u(x,t)$, $g(x)$ задачи будем искать в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций (7)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n1}(t)\cdot X_{n1}(x)+u_{n2}(t)\cdot X_{n2}(x)\right), \qquad (15)$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_{n1}\cdot X_{n1}(x)+g_{n2}\cdot X_{n2}(x)\right), \qquad (16)$$

где $u_{ni}(t)$ - неизвестные функции и g_{ni} - неизвестные постоянные.

Подставляя (15) и (16) в уравнение (1), получим совокупность уравнений для нахождения функций $u_{n1}(t),u_{n2}(t)$ и постоянных g_{n1},g_{n2}:

$$t^{-\beta}\ {}_C D_{0t}^{\alpha}u_{ni}(t)+\lambda_{ni}u_{ni}(t)=g_{ni}\ ,\ i=1,2\ ,\ n\in N\ . \qquad (17)$$

Из представления (15), учитывая условия (2), а также полноту системы (7), получим, что неизвестные функции $u_{n1}(t),u_{n2}(t)$ также удовлетворяют условиям

$$u_{ni}(0)=\varphi_{ni},u_{ni}(T)=\psi_{ni}\ , \qquad (18)$$

где φ_{ni},ψ_{ni}- коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по системе функций (7), которые находятся по формулам

$$\varphi_{ni}=\int_0^1\varphi(x)Y_{ni}(x)dx,\psi_{ni}=\int_0^1\psi(x)Y_{ni}(x)dx\ , \qquad (19)$$

а $Y_{n1}(x),Y_{n2}(x)$ - функции, определенные по формулам (14), $i=1,2$, $n\in N$.

Найдем решение уравнения (17). Как следует из [8], общее решение однородного уравнения, соответствующее (17) имеет вид

$$u_{ni}(t)=C_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})\ ,$$

где $E_{\alpha,m,l}(z)$ - функция Килбаса-Сайго [8, 13].

Учитывая, что функция $u_{ni}(t)=\dfrac{g_{ni}}{\lambda_{ni}}$ является частным решением неоднородного уравнения (17), общее решение которого представимо в виде

$$u_{ni}(t)=C_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})+\frac{g_{ni}}{\lambda_{ni}},\ i=1,2,\ n\in N.$$

Удовлетворяя это решение первому условию из (18), получим

$$u_{ni}(t)=\varphi_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})+\frac{g_{ni}}{\lambda_{ni}}\left(1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})\right). \qquad (20)$$

Теперь определим неизвестные g_{n1},g_{n2}. Для этого равенство (20) удовлетворим второму условию из (18). Тогда для нахождения постоянных g_{n1},g_{n2} получим следующие уравнения

$$\varphi_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta})+(1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta}))\frac{g_{ni}}{\lambda_{ni}}=\psi_{ni}.$$

Отсюда

$$g_{ni}=\frac{\lambda_{ni}\left(\psi_{ni}-\varphi_{ni}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta})\right)}{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\alpha+\beta})},\ i=1,2,n\in N. \qquad (21)$$

Подставляя (21) в выражение для функций $u_{ni}(t)$ в (20), получим

$$u_{ni}(t)=\frac{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})}{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\beta+\alpha})}\psi_{ni}+\frac{E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\beta+\alpha})}{1-E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}T^{\beta+\alpha})}\varphi_{ni}, \qquad (22)$$

где $i=1,2,n\in N$.

Таким образом, найден формальный вид решения задачи в виде рядов (21) и (22), где коэффициенты g_{ni} и функции $u_{ni}(t)$ определяются соответственно по формулам (21) и (22).

3.1. Единственность решения задачи *BS*. (Uniqueness of a solution to the *BS* problem). Сначала приводим некоторые свойства функции Килбас-Сайго $E_{\alpha,m,l}(-x)$, которые используем при доказательстве единственности и существования решения задачи *BS*.

Теорема 1 [13]. *Пусть* $\alpha>0$, $m>0$ *и* $l>-\dfrac{1}{\alpha}$. *Тогда функция* $E_{\alpha,m,l}(-x)$ *является вполне монотонной на* $(0,\infty)$ *если и только если выполняются условия* $\alpha\le 1$, $l\ge m-\dfrac{1}{\alpha}$.

Так как $E_{\alpha,m,l}(0)=1$, из этой теоремы следует, что

Следствие 1. *Для любой* $x>\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *такое что* $1-E_{\alpha,m,l}(-x)\ge\delta>0$.

Имеет место:

Теорема 2. Если решение задачи *BS* существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, противоположное. Пусть существуют два решения $\{u_1(x,t), g_1(x)\}$ и $\{u_2(x,t), g_2(x)\}$ задачи BS.

Обозначим $\tilde{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ и $\tilde{g}(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Тогда функции $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$t^{-\beta}\,{}_C D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_{xx}(x,t) + \tilde{g}(x) \tag{23}$$

и условиям

$$\tilde{u}(x,0) = 0,\ \tilde{u}(x,T) = 0,\ 0 \le x \le 1, \tag{24}$$

$$\tilde{u}(0,t) = 0,\ \tilde{u}(x_0,t) = \tilde{u}(1,t),\ 0 \le t \le 1. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}_{ni}(t) = \int_0^1 \tilde{u}(x,t) Y_{ni}(x)dx, \tag{26}$$

где функция $Y_{ni}(x)$ определяется по формуле (14), $i = 1,2$, $n \in N$.

Применяя оператор ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (26) и учитывая уравнение (23), а также условия (24) и (25), заключаем, что функция $\tilde{u}_{ni}(t)$ удовлетворяет уравнению и условиям:

$$t^{-\beta}\,{}_C D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}_{ni}(t) + \lambda_{ni}\tilde{u}_{ni}(t) = \tilde{g}_{ni},\ \tilde{u}_{ni}(0) = 0,\ \tilde{u}_{ni}(T) = 0, \tag{27}$$

где $\tilde{g}_{ni} = (\tilde{g}(x), Y_{ni}(x))_0$, $i = 1,2$, $n \in N$.

Из (17), (18) и (22) получим, что решение уравнения из (27), удовлетворяющее первому краевому условию из (27), имеет вид

$$\tilde{u}_{ni}(t) = \frac{\tilde{g}_{ni}}{\lambda_{ni}}\left(1 - E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})\right).$$

Отсюда, удовлетворяя второе краевое условие из (27), получим

$$\frac{\tilde{g}_{ni}}{\lambda_{ni}}\left(1 - E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ni}t^{\beta+\alpha})\right) = 0.$$

Далее, учитывая следствие 1, получим, что $\tilde{g}_{ni} = 0$. Отсюда следует, что задача (27) имеет только тривиальное решение, т.е. $\tilde{u}_{ni}(t) = 0$, $\tilde{g}_{ni} = 0$.

В результате получим, что для любого фиксированного $t \in [0,1]$ функции $\tilde{u}(x,t), \tilde{g}(x)$ ортогональны к системе (14), которая полна в $L_2(0,1)$. Тогда $\tilde{u}(x,t) = 0$, $\tilde{f}(x) = 0$. Единственность решения задачи доказана.

3.2. Существование решение задачи *BS*. (Existence of a solution to the *BS* problem). Докажем существование решения задачи. Имеет место:

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(x) \in C^4[0,1],\ \varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \varphi(1) = \varphi(x_0), \varphi''(1) = \varphi''(x_0),$$

$$\psi(x)\in C^4[0,1],\psi(0)=\psi''(0)=0,\psi(1)=\psi(x_0),\psi''(1)=\psi''(x_0).$$

Тогда решение задачи BS существует.

Доказательство. Поскольку система (7) образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, то функции $u(x,t)$ и $g(x)$ можно представить в виде биортогонального ряда (15) и (16), где коэффициенты g_{ni} и функции $u_{ni}(t)$ определяются соответственно по формулам (21) и (22).

При помощи непосредственного вычисления несложно показать, что функции $u(x,t)$, $g(x)$, определенные рядами (15) и (16), удовлетворяют уравнению (1) и условиям (2), (3). Остаётся доказать правомерность этих действий. Теперь покажем, что $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,0}\left(\overline{\Omega}\right)$. Из (15), дифференцируя два раза $u(x,t)$ по переменной *x* получим

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\lambda_{n1}\cdot u_{n1}(t)X_{n1}(x)-\lambda_{n2}\cdot u_{n2}(t)X_{n2}(x)\right). \tag{28}$$

Так как $|X_{ni}(x)|\le 1$, $i=1,2$, отсюда следует, что

$$\left|u_{xx}(x,t)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{n1}\left|u_{n1}(t)\right|+\lambda_{n2}\left|u_{n2}(t)\right|\right). \tag{29}$$

Оценим функции $u_{n1}(t)$ и $u_{2n}(t)$. Учитывая свойства функции Килбаса-Сайго (см. теорема 1, следствие), из (22) имеем

$$|u_{ni}(t)|\le\frac{2}{\delta}\left(|\varphi_{ni}|+|\psi_{ni}|\right),\ i=1,2. \tag{30}$$

Далее, интегрируя по частям выражения для коэффициентов φ_{ni},ψ_{ni} из (19), с учетом (30) и условий теоремы, из (29) получим

$$\left|u_{xx}(x,t)\right|\le C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n1}}\left(\left|\varphi_{n1}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n1}^{(4)}\right|\right)+\frac{1}{\lambda_{n2}}\left(\left|\varphi_{n2}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n2}^{(4)}\right|\right)\right),$$

где $\varphi_{ni}^{(4)}=\int_0^1\varphi^{IV}(x)Y_{ni}(x)dx,\psi_{ni}^{(4)}=\int_0^1\psi^{IV}(x)Y_{ni}(x)dx,i=1,2$, $C>0$.

Таким образом, ряд (28) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\left(\left|\varphi_{n1}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n1}^{(4)}\right|\right)+\frac{1}{n^2}\left(\left|\varphi_{n2}^{(4)}\right|+\left|\psi_{n2}^{(4)}\right|\right)\right),$$

сходимость которого следует из неравенства Коши-Шварца, а также из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{ni}^{(4)}|^2,\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_{ni}^{(4)}|^2,\ i=1,2$.

Тогда согласно теореме Вейерштрасса [14], ряд (28) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$ и его сумма является непрерывной функцией в этой области. Таким же образом доказывается, что $t^{-\beta}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, а $f(x)\in C[0,1]$ вытекает из того, что $t^{-\beta}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}\in C(\overline{\Omega})$ и из уравнения (1). Теорема доказана.

Литература

1. Carleman, T.. Sur la theorie des equations integrales et ses applications. [Text] / T. Carleman. // Verhandlungen des Internat. // Math. Kongr., Zurich. 1932. №1. P.138–151.
2. Vyshik, M.I. On strongly elliptic system of differential equations. [Text] / M.I. Vyshik. // Mat.sb. 1951. № 29. P.615–676.
3. Browder, F. Non-local elliptic boundary value problems. [Text] / F. Browder. // Amer. J. Math.. 1964. №86. P.735–750.
4. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. [Текст] /А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. //Докл. АН СССР. / -1969. -Т. 185. № 4. -С. 739–740.
5. Скубачевский, А.Л. Неклассические краевые задачи [Текст] /А.Л. Скубачевский // Современная Математика Фундаментальные Направления / -2007. -Т. 26. -С. 3–132.
6. H.Al.Shamsi, The Bitsadze–Samarskii type problem for mixed type equation in the domain with the deviation from the characteristics. [Text] /H.Al.Shamsi, B.J.Kadirkulov, S.Kerbal. // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. Vol. 41. P.1021–1030.
7. Khubiev, K.U.. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation. [Text] / K.U. Khubiev. // Journal of Samara State Technical University. Ser. physical and mathematical sciences. 2019. Vol.23. No.4. P.789-796.
8. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations. [Text] / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // Elsevier. – Amsterdam: 2006. -523 p.
9. Ерошенков, Е.П. О полноте систем корневых функций двух задач Бицадзе-Самарского. [Текст] /Е.П.Ерошенков, Б.К.Кокебаев. // В кн.: Тезисы докладов VIII респ. науч. конф. по матем. и мех., часть 1/ Алма-ата: 1984. -С. 131.
10. Ильин, В.А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка[Текст] / Ильин В.А // Дифференц. Уравнения. 1986, том 22, № 12, С. 2059–2071.
11. Бари, К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. [Текст] / Бари К. //Уч. зап. МГУ / -Москва. -Т. 148. Вып. 4. -1951. -С. 69-107.
12. Будаев, В.Д. Ортогональные и биортогональные базисы. [Текст] / Будаев В.Д. //Известия РГПУ им. А.И. Герцена. -2005. -Т. 5, № 13. -С. 7-38.
13. Boudabsa, L. Some Properties of the Kilbas-Saigo Function. [Text] / L. Boudabsa, T. Simon. // Mathematics. 2021. 9 (217). P.1-24.
14. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Часть 2: учебник [Текст] /В.А. Ильин, Э.Г. Позняк // – Москва: Наука, 1998. -448 с.