УДК 517.968
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_78

# ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА-СТИЛТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

*Каденова Зууракан Ажимаматовна*
*Заведующая лабораторией теории обратных задач ИМНАН КР, д.ф.-м.н.*
*kadenova71@mail.ru*
*Бекешова Дамира Аманбаевна*
*Соискатель ИМ НАН КР*
*bekeshova.d@mail.ru*
*Бишкек, Кыргызстан*
*Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна, к.ф.-м.н,*
*Ошский технологический университет*
*jypar75@mail.ru*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация:*** *В данной работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции, и методом неотрицательных квадратичных форм доказывается единственность решений для одного классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода с двумя независимыми переменными.*

***Ключевые слова:*** *линейные интегральные уравнения, первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность.*

# БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМ-СТИЛТЕСТИН КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ЭКИ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕЛЕРИНИН БИР КЛАССЫ

*Каденова Зууракан Ажимаматовна*
*УИА МИнун тескери маселелер лабораториясынын башчысы, ф.-м.и.д.*
*kadenova71@mail.ru*
*Бекешова Дамира Аманбаевна*
*УИА МИнун илим изилдөөчү*
*bekeshova.d@mail.ru*
*Бишкек, Кыргызстан*
*Орозмаматова Жыпаргүл Шермаматовна ф.-м.и.к.,*
*Ош технологиялык университети*
*jypar75@mail.ru*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация:*** *Бул макалада өсүүчү функцияга карата туунду түшүнүгүн колдонуу менен терс эмес квадраттык формалар усулунун, функционалдык анализдин усулдарынын жардамында биринчи түрдөгү Фредгольм-Стилтестин көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу интегралдык тендемелердин чечимдеринин жалгыздыгы далилденди.*

***Ачкыч сөздөр:*** *сызыктуу интегралдык тендемелер, биринчи түрдөгү, эки өзгөрүлмөлүү жалгыздык.*

# ONE CLASS OF FREDHOLM-STIELTIES LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

*Kadenova Zuurakan Azhimamatovna*
*Head of the laboratory theory of inverse problems IM NAS KR,*
*Doctor of Physical and Mathematical Sciences,*
*kadenova71@mail.ru*
*Bekeshova Damira Amanbaevna*
*Applicant IM NAS KR*
*bekeshova.d@mail.ru*
*Bishkek, Kyrgyzstan*
*Orozmamatova Zhipargul Shermamatovna,*
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences*
*Osh Technological University,*

*Osh, Kyrgyzstan*
**Abstract.** *In the present article the theorem about uniqueness of the linear integral equations Freaholm-Stielties of the first two independent variables with method of nonnegative quadratic forms and the concept of derivative with respect to increasing function.*
**Key words:** *linear inteqral equations, first kind, two variables, uniqueness.*

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^T H(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$
$$= f(t,x),(t,x)\in G, \qquad G=\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t\le T,\ a\le x\le b\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x), \psi(t)$ являются строго возрастающие непрерывные функции соответственно в области $[a,b], [t_0,T]$.

В настоящее время большой интерес вызывают обратные и некорректные задачи. Понятие корректности в работах А.Н. Тихонов [1], М.М. Лаврентьев [2] и В.К. Иванова [3], отличное от классического, дало средство для изучения некорректных задач и стимулировало интерес к интегральным уравнениям, имеющим большое прикладное значение. Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [4], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [5]- [10] исследованы вопросы единственности и устойчивости решений для линейных интегральных уравнений первого рода.

Понятие производной по возрастающей функции было введено А. Асановым в 2001 г. в [11] и играет особую роль в исследовании. Это понятие является обобщением обычного понятия производной функции и является обратным оператором для одного класса интеграла Стилтьеса.

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y),\ t_0\le t\le T, & a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y),\ t_0\le t\le T, & a\le x\le y\le b,\end{cases} \tag{2}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases}M(t,x,s),\ t_0\le s\le t\le T, & a\le x\le b;\\ N(t,x,s),\ t_0\le t\le s\le T, & a\le x\le b.\end{cases} \tag{3}$$

$A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s), N(t,x,s), C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):\quad t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y):\quad t_0\le t\le T,\quad a\le x\le y\le b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s):\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_4=\{(t,x,s):\quad t_0\le t\le s\le T,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_5=\{(t,x,s,y):\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\}.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$. Решение $u(t,x)$ ищется в $L^2_{\varphi,\psi}(G)$, где $v(t,x)\in L^2_{\varphi,\psi}(G)$ тогда и только тогда когда

$$\int_G |v(t,x)|^2 d\varphi(x)d\psi(t)<\infty.$$

Обозначим

$$\begin{cases} P(s,y,z) = A(s,y,z) + B(s,z,y), \ (s,y,z) \in G_1, \\ Q(s,y,\tau) = M(s,y,\tau) + N(\tau,y,s). \ (s,y,\tau) \in G_3. \end{cases} \quad (4)$$

**Определения.** Производной по $\varphi(x)$ функции $f(x)$ в точке $x \in (a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta\varphi(x)$ при стремлении приращения аргумента $\Delta x$ к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{\varphi}(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}$$

Нахождение производной функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ будем называть дифференцированием по $\varphi(x)$ этой функции. Если функция $f(x)$ в точке $x \in (a,b)$ имеет конечную производную по $\varphi(x)$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой по $\varphi(x)$ в этой точке. Функция $f(x)$, дифференцируемая по $\varphi(x)$ во всех точках интервала называется дифференцируемой по $\varphi(x)$ на $(a,b)$.

С помощью производной по возрастающей функции и методом неотрицательных квадратичных форм доказывается теорема единственности решений уравнения (1).

Пусть выполняются следующие условия:

1) $P(s,b,a) \ge 0, \ s \in [t_0,T], P(s,b,a) \in C[t_0,T],$

$P'_{\varphi(y)}(s,y,a) \le 0, \ (s,y) \in G, \ P'_{\varphi(y)}(s,y,a) \in C(G),$

$P'_{\phi(z)}(s,b,z) \ge 0, \ (s,z) \in G, \ P'_{\phi(z)}(s,b,z) \in C(G),$

$P''_{\phi(z)\phi(y)}(s,y,z) \le 0, \ (s,y,z) \in G_1, \ P''_{\phi(z)\phi(y)}(s,y,z) \in C(G_1),$

$Q(T,y,t_0) \ge 0, \ y \in [a,b], \ Q(T,y,t_0) \in C[a,b],$

$Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0) \le 0, \ (s,y) \in G, \ Q'_{\psi(t)}(s,y,t_0) \in C(G),$ ,

$Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau) \ge 0 \quad (y,\tau) \in G, \ Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau) \in C(G),$

$Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau) \le 0, (s,y,\tau) \in G_2, Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau) \in C(G_2).$

и для любого

$$v(t,x) \in L_2(G), \int_a^x A(t,x,y)v(t,y)d\varphi(y), \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)d\varphi(y), \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)d\psi(s), \int_t^T N(t,x,s)v(s,x)d\psi(s) \in C(G),$$

где $C[t_0,T], \ C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$-пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,T], \ G, G_1$ и $G_3$;

2) $C(T,b,t_0,a) \ge 0$ ,

$C'_{\varphi(s)}(s,b,t_0,a) \in C[t_0,T], \ C'_{\varphi(s)}(s,b,t_0,a) \le 0 \ \forall s \in [t_0,T],$

$C'_{\varphi(\tau)}(T,b,\tau,a) \in C[t_0,T], \ C'_{\varphi(\tau)}(T,b,\tau,a) \ge 0 \ \forall \ \tau \in [t_0,T],$

$$C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\in C[a,b],\ C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\le 0\ \forall\ y\in[a,b],$$

$$C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z)\in C[a,b],\ C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z)\ge 0\ \forall\ z\in[a,b],$$

$$C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\in C(G),\ C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\ge 0\ \forall\ (s,y)\in G,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\le 0\ \forall\ (y,\tau)\in G,$$

$$C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\in C(G),\ C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\le 0\ \forall\ (s,z)\in G,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\ge 0\ \forall\ (\tau,z)\in G,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(z)}(s,y,\tau,a)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(z)}(s,y,\tau,a)\ge 0\ \forall\ (s,y,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\le 0\ \forall\ (s,z,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\in C(G_1),\ C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\ge 0\ \forall\ (s,y,z)\in G_1,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\in C(G_1),\ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\le 0\ \forall\ (\tau,y,z)\in G_1,$$

$$C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\in C(G_4),\ C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\ge 0\ \forall\ (s,y,\tau,z)\in G_4,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,b,\tau,a)\in C(G_5),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,b,\tau,a)\le 0\ \forall\ (s,\tau)\in G_5=\{(s,\tau): t_0\le\tau\le s\le T\},$$

$$C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\in C(G_6),\ C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\le 0\ \forall (y,z)\in G_6=\{(y,z): a\le z\le y\le b\},$$

3) При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\right)\alpha_1^2+$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-Q'_{\varphi(y)}(s,y,t_0)\right)\alpha_2^2+\frac{2}{(s-t_0)(y-a)}\left(-C(s,y,t_0,a)\right)\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left(-Q''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\right)\alpha_3^2+\frac{2}{y-a}\left(-C'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,a)\right)\alpha_3\alpha_1+$$

$$+\frac{2}{s-t_0}\left(-C'_z(s,y,t_0,z)\right)\alpha_2\alpha_4+\frac{1}{s-t_0}\left(-P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\right)\alpha_4^2+$$

$$+\left(-2C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(s,y,\tau,z)\right)\alpha_3\alpha_4\ge 0;$$

4) Если при почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется, хотя бы, один из следующих условий:

1) $\alpha_1=0$; 2) $\alpha_2=0$; 3) $\alpha_3=0$; 4) $\alpha_4=0$.

**Теорема.** Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (1) единственно в классе $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

**Доказательство.** В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^t M(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+$$

$$\int_t^T N(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=f(t,x),\ (t,x)\in G. \quad (4)$$

Обе части уравнения (4) умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_y^b B(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s M(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_s^T N(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \quad (5)$$

Применяя формулу Дирихле из (5), имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y\left[A(s,y,z)+B(s,z,y)\right]u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s[M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s)]u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \quad (6)$$

Учитывая обозначения (3), получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\varphi(z)d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)+ \quad (7)$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y).$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, для первого интеграла получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(z)\,u(s,y)d\varphi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^T P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\varphi(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P'_{\varphi(z)}(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\psi(z)d\varphi(y)d\varphi(s), \tag{8}$$

где $P'_{\psi(z)}(t,x,s),\ P'_{\varphi(x)}(t,x,s)$ частные производные по $t$ и $s$ соответственно. Дважды интегрируя по частям и применяя формулы Дирихле для второго интеграла, имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T Q'_\tau(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(s)d\varphi(y). \tag{9}$$

Для преобразования третьего интеграла, используем соотношение

$$Cv''_{\psi(\tau)\phi(z)}=\left(Cv\right)''_{\psi(\tau)\phi(z)}-\left(C'_{\psi(\tau)}v\right)'_{\phi(z)}-\left(C'_{\phi(z)}v\right)'_{\psi(\tau)}+C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}v.$$

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)d\varphi(z)d\psi(\tau)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T C(s,y,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T C'_\tau(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\psi(s)d\psi(\tau)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_z^b C'_z(s,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T\int_z^b C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\varphi(\tau)d\varphi(z).$$

Далее, имея в виду, что

$$Cvv''_{\varphi(s)\varphi(y)}=\frac{1}{2}\left(Cv^2\right)''_{\psi(s)\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\psi(s)}v^2\right)'_{\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\varphi(y)}v^2\right)'_{\psi(s)}+\frac{1}{2}C''_{\psi(s)\varphi(y)}v^2-Cv'_{\varphi(y)}v'_{\varphi(s)}$$

и применением формулу Дирихле, получим

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T C(T,b,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,\nu)d\xi\right)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}C'_\tau(T,b,\tau,a)\left(\int_\tau^T\int_a^b u(\xi,\nu)d\xi d\nu\right)^2 d\psi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C'_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\left(\int_\tau^T\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'_\tau(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(\tau)d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}C_z^{'}\left(T,b,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)-$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}C_{\tau z}^{''}\left(T,b,\tau,z\right)\left(\int_{\tau}^{T}\int_{z}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(z)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{y}C_{\tau zy}^{'''}\left(T,y,\tau,z\right)\left(\int_{\tau}^{T}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(\tau)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}C_{\tau zs}^{'''}\left(s,b,\tau,z\right)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}C_{\tau zsy}^{(IV)}\left(s,y,\tau,z\right)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)-$$

$$-\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}C_{\tau z}^{''}\left(s,y,\tau,z\right)\left(\int_{\tau}^{s}u\left(\xi,y\right)d\xi\right)\left(\int_{z}^{y}u\left(s,\nu\right)d\nu\right)d\varphi(z)d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi(y) \qquad (10)$$

Выражения (8), (9) и (10) подставляя в (7), получим

$$\frac{1}{2}\left(T,b,t_0,a\right)\left(\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}u\left(\xi,\nu\right)d\xi d\nu\right)^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{P(s,b,a)\left(\int_{a}^{b}u\left(s,\nu\right)d\nu\right)^2-\right.$$

$$\left.-C_{\psi(s)}\left(s,b,t_0,a\right)\left(\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{s}u\left(\nu,\xi\right)d\nu d\xi\right)^2+C_{\psi(s)}\left(T,b,s,a\right)\left(\int_{s}^{T}\int_{a}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\xi d\nu\right)^2\right\}d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left\{Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{T}u\left(\xi,y\right)d\xi\right)^2-C_{\varphi(y)}\left(T,y,t_0,a\right)\left(\int_{a}^{y}\int_{t_0}^{T}u\left(\nu,\xi\right)d\nu d\xi\right)^2+\right.$$

$$\left.+C'_{\varphi(y)}\left(T,b,t_0,y\right)\left(\int_{t_0}^{T}\int_{y}^{b}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2\right\}d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}\left\{L\left(s,y,\tau,z,\int_{a}^{y}u\left(s,\nu\right)d\nu,\int_{t_0}^{s}u\left(\xi,y\right)d\xi,\int_{\tau}^{s}u\left(\xi,y\right)d\xi,\int_{z}^{y}u\left(s,\nu\right)d\nu\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\left(s-t_0\right)\left(y-a\right)}\left[P'_{\varphi(y)}\left(s,b,y\right)\left(\int_{y}^{b}u\left(s,\nu\right)d\nu\right)^2+Q_{\psi(s)}^{'}\left(T,y,s\right)\left(\int_{s}^{T}u\left(\xi,y\right)d\xi\right)^2+\right.$$

$$+C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,t_0,a\right)\left(\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2-C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(T,y,s,t_0\right)\left(\int_{s}^{T}\int_{a}^{y}u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right)^2-$$

$$-C''_{\varphi(y)\psi(s)}(s,b,t_0,y)\left(\int_{t_0}^{s}\int_{y}^{b}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2+C''_{\psi(s)\varphi(y)}(T,b,s,y)\left(\int_{s}^{T}\int_{y}^{b}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{y-a}\Bigg[C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,a)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{a}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2-$$

$$-C'''_{\psi(\tau)\varphi(y)\psi(s)}(s,b,\tau,y)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{y}^{b}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{s-t_0}\Bigg[C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2-C'''_{\psi(s)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,s,z)\left(\int_{s}^{T}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\Bigg]+$$

$$+C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\Bigg\}d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}C''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,b,\tau,a)\left(\int_{\tau}^{s}\int_{a}^{b}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\varphi(y)=$$

$$=\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}f(s,y)u(s,y)d\psi(s)d\varphi(y). \qquad (11)$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$ Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4), из (11) имеем

$$\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi=0,\ \forall(s,y)\in G \text{ или } \int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu=0,\ \forall(s,y)\in G.$$

Отсюда $u(t,x)=0,$ при всех $(t,x)\in G.$ Теорема доказана.

**Литература**


1. Иванов, В.К. О некорректно поставленных задачах. Дифференциальные уравнения[Текст] / Иванов В.К.//-1968.- №2.-С.61.
2. Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода[Текст] / Лаврентьев М.М. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
3. Тихонов, А.Н. О методах решения некорректно поставленных задач[Текст] / Тихонов А.Н. // В кн.: Тезисы докладов, Международный конгресс математиков.- М., 1966.
4. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа[Текст] / Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. // М.: Наука, 1980.
5. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода[Текст] / Иманалиев М.И., Асанов А. // ДАН СССР.-1989.-Т.309., №5.,-С. 1052-1055.

6. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода[Текст] / Иманалиев М.И., Асанов А. // ДАН 2007. Т. 415. № 1. с. 14-17.
7. Imanaliev, M.I. A Class of Linier Intergral Eguations of the First Kind with Two Independent Variables[Text] / Imanaliev M.I., AsanovA., Kadenova Z.A. // ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2014, Vol.89, № 1, pp.98-102.
8. Asanov, A. Regularization and Stability of Systems of Linear Integral Fredholm Equations of the First Kind[Text] / Asanov A., Kadenova Z. A. // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 38, Samara State Technical University, Samara, 2005, Pp.11–14. (In Russ.), http://mi.mathnet.ru/eng/vsgtu/v38/p11, DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu363
9. Asanov, A. M. Uniqueness and stability of solutions of linear intergral equations of the first kind with two variables[Text] / Asanov A. M., H. Chelik, Kadenova Z. A. // International Journal of Mathematical Analysis. – 2013. – Vol. 7. – No 17-20. – P. 907-914. – DOI 10.12988/ijma.2013.13088. – EDN XKWECX.
10. Kadenova, Z. A. On the uniqueness of solutions of Fredholm linear integral equations of the first kind on the semi-axis [Text] / A. Asanov, Z. A. Kadenova, D. Bekeshova // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. – 2022. – No 1. – P. 82-87. – DOI 10.52448/16948173_2022_1_82. – EDN FXALAA.
11. Asanov, A. The denivative of a function by means of a increasing function. [Text] / Asanov A.// Fen Bilimleri Dergisi, Kyrgyz-Turkish Manas University, 1. 18-64 (2001).