МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_90

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет,
Бишкек, Кыргызстан
Момбекова Гулназ Береновна, ст. преподаватель,
gmombekova78@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза оптимального граничного управления при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функция граничного воздействия нелинейно зависит от функции управления. Исследование проведено на основе обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Установлен граница изменения значения параметра интегрального оператора, при которых существует обобщенное решение. В задаче оптимизации требуется минимизировать кусочно-линейный функционал и требуется найти управление в зависимости от состояния управляемого процесса. Установлено, что наличие интегрального оператора в уравнении существенно влияет на разрешимость задачи нелинейной оптимизации, в частности, сильно усложняется структура уравнения типа Беллмана. Разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления.*

Ключевые слова: *Краевая задача, обобщенное решение, функционал, схема Беллмана-Егорова, интегро-дифференциальное уравнение типа Беллмана, синтез граничного управления.*

БӨЛҮКЧӨ-СЫЗЫКТУУ ФУНКЦИОНАЛДЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУДАГЫ ОПТИМАЛДУУ ЧЕКТИК БАШКАРУУНУ СИНТЕЗДӨӨ

Керимбеков Акылбек, ф.-м.и.д., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргыз-Орус Славян университети,
Бишкек, Кыргызстан
Момбекова Гулназ Береновна, улук окутуучу,
gmombekova78@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Фредгольмдун интегралдык операторун кармаган жекече туундулуу интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштырууда чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечимге ээ болушу жөнүндөгү суроолор изилденген. Чек аралык таасир берүүчү функциясы башкаруу функциясына салыштырмалуу сызыктуу эмес болгон учур каралган. Изилдөө башкарылуучу процесстин чек аралык маселесинин жалпыланган чечиминин негизинде жүргүзүлгөн. Интегралдык оператордун параметринин өзгөрүү чек арасы аныкталган. Оптималдаштыруу маселесинде төмөнкүлөрдү табуу талап кылынат: бөлүкчө-сызыктуу функционалды минималдаштыруу жана башкарылуучу процесстин абалынан көз каранды түрдө башкарууну табуу. Теңдемедеги интегралдык*

оператордун бар болушу сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышына таасир берээри аныкталган. Жекече учурда Беллман тибиндеги теңдеменин түзүлүшү абдан татаалданат. Синтездөөдө оптималдуу башкарууну тургузуунун алгоритми иштелип чыккан.
Урунттуу сөздөр: *чек аралык маселе, жалпыланган чечим, функционал, Беллман-Егоровдун схемасы, Беллман тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме, чек аралык башкаруунун синтези.*

SYNTHESIS OF THE OPTIMAL BOUNDARY CONTROL IN MINIMIZING THE PIECEWISE -LINEAR FUNCTIONAL

Kerimbekov Akylbek, Dr., profeccor,
akl7@rambler.ru
Kyrgyz Russian Slavic University,
Bishkek, Kyrgyzstan
Mombekova Gulnaz Berenovna, Senior Lecturer,
gmombekova78@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract:: *In the paper solvability of the optimal boundary control synthesis problem was investigated in the optimization of thermal processes described by partial integro-differential equations with Fredholm integral operator when the boundary influence function nonlinearly depends on control function. The research was carried out on basis of generalized solution of the boundary value problem for controlled process. Boundary is established of change in parameter values of the integral operator, in which generalized solution exists. In the optimization problem, it is required to minimize the piecewise -linear functional and to find control depended on state of the controlled process. It has been established that the presence of integral operator in the equation significantly affects the solvability of the nonlinear optimization problem, in particular, complicated the structure of the Bellman-type equation. An algorithm has been developed for constructing a synthesizing optimal control.*
Keywords: *Boundary value problem, generalized solution, functional, Bellman-Egorov scheme, Bellman-type integro-differential equation, boundary control synthesis.*

Введение

Решение задачи синтеза и проводить научные исследования в этом направлении стало возможным после появления работы А. И. Егорова[1]. Появились небольшое количество работ посвященных исследованиям задач синтеза при оптимизации колебательных и тепловых процессов, описываемых уравнениями в частных производных. В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза оптимального граничного управления при оптимизации тепловых процессов в случае, когда процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением и функция граничного источника нелинейна относительно функции управления. Разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления.

Постановка задачи синтеза.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[u(t)] = \int_0^T \int_0^1 \left[V(t,x) - \xi(t,x)\right]^2 dxdt + \beta \int_0^T |u(t)|\, dt,\ \beta > 0 \tag{1}$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи

$$\begin{aligned} &V_t = V_{xx} + \gamma \int_0^T K(t,\tau) V(t,x) d\tau, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T \\ &V(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1 \\ &V_x(t,0) = f[t, u(t)],\ V_x(t,1) = 0,\ 0 < t < T \end{aligned} \tag{2}$$

где

$\xi(t,x)\in H(Q), Q=(0,1)\times(0,T),\ \psi(x)\in H_1(0,1),$
$f[t,u(t)]\in H(0,T), K(t,\tau)\in H(D), D=(0,T)\times(0,T)$ - заданные функции, являющиеся элементами соответствующих гильбертовых пространств квадратично суммируемых функций H, $u(t)]\in H(0,T)$ - функция управления, причем функция граничного источника $f[t,u(t)]$ удовлетворяют условию монотонности по функциональной переменной $u(t)$, т.е.

$$f[t,u(t)]\neq 0, \forall t\in(0,T) \tag{3}$$

В задаче синтеза требуется найти искомое управления $u^0(t)$ в зависимости от состояния управляемого процесса $V(t,x)$, в виде функции (или функционала)

$$u^0(t)=\varphi[t,V(t,x)] \tag{4}$$

Под обобщенным решением краевой задачи (2) понимается функция $V(t,x)\in H(Q)$, имеющая обобщенную производную $V_x(t,x)\in H(Q)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[V(t,x)\Phi_t(t,x)-V_x(t,x)\Phi_x(t,x)\right]dxdt+\\&+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left(\gamma\int_0^t K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)\Phi(t,x)dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,0)f[t,u(t)]dt\end{aligned} \tag{5}$$

при любых $t\in[t_1,t_2]$ и для любой функции $\Phi(t,x)\in H_1(Q)$, а также начальному условию в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1\left[V(t,x)-\Phi(x)\right]\Phi_0(x)dx=0\quad \forall\,\Phi_0(x)\in H(0,1). \tag{6}$$

Обобщенное решение краевой задачи (2) строим в виде ряда Фурье

$$V(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)z_n(x),\ \ V_n(t)=\int_0^1 V(t,x)z_n(x)dx, \tag{7}$$

где а $z_n(x)$ является решением краевой задачи вида

$$z_n''(x)+\lambda_n^2 z_n(x),\ z_n'(0)=0, z_n'(1)=0 \tag{8}$$

и имеет вид

$$z_n(x)=\begin{cases}1, n=0\\ \sqrt{2}\cos\lambda_n x, n\neq 1,2,3,..., \lambda_n=n\pi\end{cases} \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье $v_n(t)$ определяется как решения интегрального уравнения Фредгольма 2-рода вида

$$V_n(t)=\gamma\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds+a_n(t) \tag{10}$$

где ядро

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau\ , \tag{11}$$

а свободный член

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(0) f(\tau, u(\tau)) d\tau \tag{12}$$

Согласно [4] коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$V_n(t) = \gamma \int_0^T R_n(t,s,\gamma) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{13}$$

где резольвента

$$R_n(t,s,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^{i-1} K_{n,i}(t,s),$$

интегрированные ядра

$$K_{n,i+1}(t,s) = \int_0^t K_n(t,\eta) K_{n,i}(\eta,s) d\eta, \; K_{n,1}(t,s) \equiv K_n(t,s)$$

являются известными функциями.

Доказаны следующие оценки

$$\left|K_{n,i}(t,s)\right|^2 \le \frac{\left(K_0 T\right)^{i-1}}{\left(2\lambda_n^2\right)^i} \int_0^T K^2(\tau,s) d\tau, \; n = 0,1,2,...$$

$$\left|R_n(t,s,\gamma)\right| \le \left(\frac{\int_0^T K^2(\tau,s) d\tau}{\sqrt{2\lambda_n^2} - |\gamma| \sqrt{K_0 T}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\gamma) ds \le \frac{\int_0^0 \int_0^T K^2(\tau,s) d\tau ds}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\gamma|\sqrt{K_0 T}\right)^2} = \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\gamma|\sqrt{K_0 T}\right)^2},$$

на основе которых установлено, что ряд Неймана (14) сходится к непрерывной функции при выполнении условия

$$|\gamma| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_n^2}} < 1, \left(|\gamma| < \frac{\sqrt{2\lambda_n^2}}{\sqrt{K_0 T}} \xrightarrow{n \to \infty} \infty \right) \tag{14}$$

Далее доказано, что функция $V(t,x)$, определяемая по формуле (7), является квадратично суммируемой функцией, т.е. $V(t,x) \in H(Q)$.

Разрешимость задачи синтеза

Разрешимость задачи синтеза исследуем согласно схеме Беллмана-Егорова. Функционал Беллмана определяем по формуле

$$S[t, V(t,x)] = \min_{\substack{u \in \mathrm{P} \\ t \le \tau \le T}} \left\{ \beta \int_t^T P^2[\tau, u(\tau)] d\tau + \int_0^T \int_0^1 \left[V(\tau,x) - \xi(t,x)\right]^2 dx dt \right\} \tag{15}$$

Вывод уравнения типа Беллмана. Непосредственным вычислением получим интегро-дифференциальное уравнение типа Беллмана следующего вида

$$-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t}=$$

$$=\min_{u\in P}\left\{\beta\left|u(t)\right|-m(t,0)f[t,u(t)]+\int_0^1\left[-m_x(t,x)V_x(t,x)+\left(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)\right]dx\right\} \tag{16}$$

где $m(t,x)$ -градиент функционала $S[t,V(t,x)]$.

Это уравнение следует рассматривать вместе с условия

$$S[t,V(t,x)]=\int_0^T\int_0^1\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2 dx, \tag{17}$$

которое получено согласно определению функционала Беллмана по формуле (15).

Задача (16)-(17) называется задачей Коши-Беллмана. Она решается в два этапа. На первом этапе решаем задачу min. Поскольку множество допустимых значений открытое множество, то задача минимизации функции

$$\Pi(\cdot,u)=\beta\left|u(t)\right|-m(t,0)f[t,u(t)]$$

решается классическими методом. Условие оптимальности первого порядка получим в виде равенства

$$\Pi_u(\cdot,u)=\beta sign\,u(t)-m(t,0)f_u[t,u(t)]=0, \tag{18}$$

а условие второго порядка получим в виде дифференциального неравенства

$$\Pi_{uu}(\cdot,u)=-m(t,0)f_{uu}[t,u(t)]>0,$$

Которое в силу (18) можно переписать в виде

$$\Pi_{uu}(\cdot,u)=\beta f_u(t,u(t))\left(f_u^{-1}(t,u(t)\right)_u sign\,u(t)>0. \tag{19}$$

Данная задача имеет специфические особенности.

В области $u(t)\succ 0$ условие (18) примет вид

$$\beta-m(t,0)\,f_u[t,u(t)]=0 \tag{20}$$

а условия (19) заменяется неравенством

$$\beta f_u(t,u(t))\left(f_u^{-1}(t,u(t)\right)_u>0. \tag{21}$$

В области $u(t)\prec 0$ условие (18) принимает следующий вид

$$\beta+m(t,0)\,f_u[t,u(t)]=0 \tag{22}$$

а условия (19) заменяется неравенством

$$\beta f_u(t,u(t))\left(f_u^{-1}(t,u(t)\right)_u<0. \tag{23}$$

Далее в задаче (20)-(21) в силу (21) существует однозначная функция $\varphi(\cdot)$ такая, что

$$u^0(t)=\varphi_t[t,m(t,0),\beta]. \tag{24}$$

Поскольку

$$m(t,0)=gradS[t,V(t,x)]$$

то по формуле (24) осуществляется синтез граничного управления $u(t)$.

Аналогичным образом устанавливается, что в области $u(t)\prec 0$ синтез граничного управления осуществляется по формуле

$$u_-^0(t)=\varphi_-[t,m(t,0),\beta] \tag{25}$$

где $\varphi_-[t]$ -однозначная известная функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Egorov A.I. Optimal stabilization of systems with distributed parameters // Optimization Techniques IFIP Technical Conference (1974) / ed. G.I. Marchuk. Novosibirsk, 1974. Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. P. 167–172. (Lecture Notes in Computer Science; vol 27). doi: 10.1007/3-540-07165-2_22.
2. Керимбеков А.О. Разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов // Труды института математики и механики. Уральское Отделение Российской Академии Наук 2021 С-128-140
3. Керимбеков А. Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 183 (2020). DOL:10/36535/0233-6723-2020-283-85-97. С. 85-97
4. Kerimbekov A., Abdyldaeva E**.** On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal - 2016, Vol. 10, No. I, P. 215-223.