УДК 517.956
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_69

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ишанкулов Толиб, д.ф.-м.н. профессор,
tolibi@mail.ru
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
Самарканд, Узекистан
Маннонов Махмуд базовый докторант.
maxmudjon_mannonov@mail.ru
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова

Аннотация. *Рассматривается задача продолжения n-аналитической функции в область по значениям ее последовательных производных до (n-1) – го порядка на части границы. Построена формула продолжения Карлемана для n – аналитических функций.*

Ключевые слова: *уравнение Коши – Римана, полианалитические функции, теорема Коши, формула Сохоцкого – Племеля, формула продалжения.*

CANTINUATION OF POLYANALYTIC FUNCTIONS

Ishankulov Tolib, Dr Sc, professor,
tolibi@mail.ru
Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
Samarkand, Uzbekistan
Mannonov Maxmud, basic doctoral student
maxmudjon_mannonov@mail.ru
Samarkand State University named after Sharof Rashidov

Abstract: *We consider the problem of continuation the n analytic function in to a domain by values of its sequential derivatives up to the (n-1) – th order on a part of the boundary. Carleman's continuation formula for n - analytic functions is constructed.*

Key words: *Cauchy – Riemann equation, n – analytic function, Cauchy theorem, Sokhotskiy – Plemel formula, continuation formula.*

Введение

Функция

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

называется полианалитической порядка n (или кратко $n-$ аналитической) в некоторой области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, если она в D имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно и удовлетворяет обобщенному условию Коши-Римана:

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0, \qquad \text{где} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1}$$

Полианалитические функции тесно связаны с полигармоническими функциями. Функция $u(x,y)$ тогда и только тогда является полигармонической, если она служит вещественной или мнимой частью полианалитической функции [7]. Бианалитические функции (решения уравнения (1) при m=2) в виду их связи с бигармоническими функциями, имеют важные применения.

В работах Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, А. В. Бицадзе, М. Б. Балка, Х. Бегера и их учеников рассмотрены различные краевые задачи для полианалитических функций [4,7-9]. В этих статьях краевые условия задаются на всей границе области регулярности.

В данной работе рассмотрим задачу продолжения n-аналитической функции в область по ее значениям и значениям производных до $(n-1)$-го порядка на части границы этой области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D-$ ограниченная область с кусочно-гладкими границей требуется определить n-аналитическую функцию $w(z)$ в области D по значениям ее последовательных производных $\dfrac{\partial^k w}{\partial \overline{z}^k}\left(k=0,1,...,n-1\right)$, на части границы $S\left(S\subset\partial D\right)$ этой области:

$$\frac{\partial^k w}{\partial \overline{z}^k}=f_k\left(z\right)\quad\left(k=0,1,...,n-1\right),\quad z\in S\quad\left(\frac{\partial^0 w}{\partial \overline{z}^0}=w\right).\qquad(2)$$

Класс полианалитических порядка n функций в области D обозначим через $\Pi_n(D)$. При n = 1 этот класс совпадает с классом аналитических в области D функций. Поэтому задачу (1), (2) естественно называть граничной задачей продолжения для полианалитических функций. Данная задача является некорректной. Решение единственно, но неустойчиво. Пример некорректности типа Адамара приведен в [10].

2. Формула продолжения Карлемана

Важным средством в теории аналитических функций является интегральная формула Коши. Для $n-$аналитической функции Н. Теодореско [2] впервые получил подобную формулу выражающую значения $n-$аналитической функции в области D через значений этой функции и ее последовательных производных $w_{\overline{z}^k}\left(k=0,1,...,n-1\right)$ на границе:

$$w\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D}\frac{\left(\overline{z}-\overline{t}\right)^k}{k!\left(t-z\right)}w_{\overline{t}^k}(t)dt\quad\left(w_{\overline{t}^0}=w\right).\qquad(3)$$

В случае $n=1$, решение задачи (1), (2) для аналитических функций можно задавать формулой Карлемана ([5, стр. 60-61]; [6, стр. 18-19]). Для $n-$аналитических функций когда часть границы области является отрезком действительной оси (область типа шапочки) формула Карлемана доказана в [10]. Приведем аналог формулы Карлемана для $n-$ аналитических функций в случае когда областью регулярности являеться единичный круг $D_1=\left\{z:\left|z\right|<1\right\}$, S - дуга $\left(t',t''\right)$ окружности $\partial D_1,\left(t'=e^{i\theta'},t''=e^{i\theta''}\;0<\theta'<\theta''<2\pi\right)$.

Рассмотрим гармоническую меру ω дуги S относительно круга D_1 [5]:

$$\omega_1\left(z,\theta',\theta''\right)=\frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{z-e^{i\theta''}}{z-e^{i\theta'}}e^{\frac{\theta'-\theta''}{2}i}\right).$$

Функция Карлемана дуги S относительно круга D_1 следующий вид [5]:

$$\Phi_\sigma(t,z)=\frac{1}{t-z}\exp\left\{\sigma\left[\lambda(t)-\lambda(z)\right]\right\},$$

где $\lambda(z)\in A(D_1)$ аналитическая функция в области D_1 такая что $\omega(z)=\operatorname{Re}\lambda(z)$, $\sigma>0$ положительный числовой параметр.

Теорема 1. Для функции $w\in\Pi_n(D_1)\cap C^{n-1}(\bar{D}_1)$ при $z\in D_1$ справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения

$$w(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}\Phi_\sigma(t,z)w_{\bar{t}^k}(t)dt \tag{4}$$

$$\begin{gathered}w(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)}w_{\bar{t}^k}(t)dt+\\+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}dt.\end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство. Эквивалентность (4) и (5) следует из формулы

$$\lim_{\sigma\to\infty}\psi(\sigma,z)=\int_0^\infty\frac{d\psi(\sigma,z)}{d\sigma}+\psi(0,z).$$

Докажем (4). Из определения функции Карлемана, следует что Φ_σ представима в виде

$$\Phi_\sigma(t,z)=\frac{1}{t-z}+g_\sigma(t,z),$$

где

$$g_\sigma(t,z)=\frac{\exp\left\{\sigma\left[\lambda(t)-\lambda(z)\right]\right\}-1}{t-z}$$

регулярная ограниченная аналитическая по t функция в области D_1. Покажем, что функция

$$F(t,z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)$$

является аналитической по t в D_1, непрерывной на $\bar{D}_1$. Прямое вычисление показывает справедливость равенства:

$$\frac{\partial F(t,z)}{\partial\bar{t}}=\frac{(\bar{z}-\bar{t})^{n-1}}{(n-1)!}w_{\bar{t}^n}(t)=0.$$

Тогда функция $F_1(t,z)=g_\sigma(t,z)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)$ тоже является аналитической по t в D_1, ограниченной на $\bar{D}_1$. По теореме Коши, имеем:

$$\int_{\partial D_1} g_\sigma(t,z)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}w_{\bar t^k}(t)dt=0. \tag{6}$$

Из равенств (3) и (6), поличем

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1}\varPhi_\sigma(t,z)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}w_{\bar t^k}(t)dt.$$

Перепишем последнее равенства в вида:

$$\begin{aligned} w(z)&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!(t-z)}e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}w_{\bar t^k}(t)dt+\\ &+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D\setminus S}\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!(t-z)}e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}w_{\bar t^k}(t)dt \end{aligned} \tag{7}$$

Оценим второй интеграл в правой части (7):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D\setminus S}\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!(t-z)}e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}w_{\bar t^k}(t)dt\right|\le C_1(z)e^{-\sigma\omega(z)} \tag{8}$$

где $C_1(z)$ вполне определенная функция не зависящая от σ, конечная при каждом $z\in D_1$. Переходя к пределу в (7), при $\sigma\to\infty$ и учитывая неравенство (8), поличим (4).

Эквивалентные формулы продолжения типа Карлемана (4), (5) дают решение задачи (1), (2) в D_1.

Рассмотрим вопрос существования, решения задачи (1), (2). С этой целью рассмотрим область $D_1'=D_1\cup\{z:\theta'<\arg z<\theta''\}$. Обозначим через $L(S)$ множество абсолютно интегрируемых на S функций. Критерий разрешимости задачи (1), (2) в D_1 дает следующая

Теорема 2. Пусть

$$f_k\in L(S)\cap C^{n-k-1}(S^\circ),\ \ S^0=\mathrm{Int}S\ \ (k=0,...,n-1).$$

Для существования функции $w\in \varPi_n(D_1)\cap C^{n-1}(D_1\cup S_0)$ удовлетворяющей условиям

$$w_{\bar z^k}(t)=f_k(t)\quad (k=0,1,...,n-1),t\in S_0, \tag{9}$$

необходимо и достаточно чтобы для каждого $z\in D_1'$ сходился несобственный интеграл:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\sigma\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar z-\bar t)^k}{k!}f_k(t)e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}dt\right|<\infty \tag{10}$$

(равномерно на кампактах из D_1).

Доказательство. Необходимость. Пусть сушествует функция $w\in \varPi_n(D_1)\cap C^{n-1}(D_1\cup S_0)$ удовлетворяющая условиям (9). Функция

$$g_{1\sigma}(t,z)=\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}$$

при каждом $z\in D_1'$, является аналитической по t в D_1, непрерывной на $\bar{D}_1$. Поэтому повторяя рассуждение при доказательстве теоремы 1, можно убедится что равенство (6) сохраняется если там заменит g_σ на $g_{1\sigma}$:

$$\int_{\partial D_1} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt=0.$$

Перепишем последнее равенство в виде:

$$\int_S g_{1\sigma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}f_k(t)dt=-\int_{\partial D_1\setminus S} g_{1\sigma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt. \qquad (11)$$

Оценим интеграл, стоящей в правой части равенства (11). Имеем

$$\left|\int_{\partial D_1} e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt\right|\le C\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{k!}C_1e^{-\sigma\omega(z,\theta',\theta'')}$$

где $C_1=\max\limits_{\substack{0\le k\le n-1\\ t\in\partial D_1}}\left|w_{\bar{t}^k}(t)\right|,\ C_1=\max\limits_{\substack{t\in\partial D_1\\ z\in K}}\left|\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\right|.$

Таким образам

$$\left|\int_S e^{\sigma[\lambda(t)-\lambda(z)]}\frac{\lambda(t)-\lambda(z)}{(t-z)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!}w_{\bar{t}^k}(t)dt\right|\le C_2e^{-\sigma\omega(z,\theta',\theta'')},z\in D_1'. \qquad (12)$$

Из неравенства (12) следует выполнение условия (10).

Достаточность. Пусть функции $f_k\in L(S)\cap C^{n-k-1}(S^\circ)$, удовлетворяют условиям (10). Покажим что существует функция $w\in\Pi_n(D_1)\cap C^{n-1}(D_1\cup S_0)$ удовлетворяющая условиям (9). Рассмотрим выражение в правой части (5), если заменит там $w_{\bar{t}^k}(t)$ на $f_k(t)$ $(k=0,1,...,n-1)$. Полученное выражение обозначим через $g(z)$. Первое слагаемое в выражение $g(z)$ является интегралом типа Коши для $n-$ аналитических функций

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{k!(t-z)}f_k(t)dt, \qquad (13)$$

которое представляет $n-$аналитическую в D_1 функцию $F_+(z)$ и $n-$аналитическую в $D_1'\setminus\bar{D}_1$ функцию $F_-(z)$ такие что разность их предельных значений и предельных значений их производных до $(n-1)-$го порядка по нормалям (или по углам ограниченного раствора, а соответствующие точки $z^+\in D_1$ и $z^-\in D_1'\setminus\bar{D}_1$ при стремлении к точке $t \in S_0$ находятся на равных расстояниях от t) на S_0 равны $f_k(t)$ $\left(k = 0,1,...,n-1\right)$ [4, стр. 67-69]

$$\frac{\partial^k F_+(t)}{\partial \overline{t}^k} - \frac{\partial^k F_-(t)}{\partial \overline{t}^k} = f_k(t), \left(k = 0,1,...,n-1\right), t \in S_0.$$

Причем, если одно из этих функций непрерывна вместе со своими производными до $\left(n-1\right)-$го порядка в соответствующей области вплоть до S_0, то другая тоже обладает данным свойством. Согласно (10), второе слагаемое выражения $g\left(z\right)$ являетется $n-$ аналитической по z в D_1'. Следовательно, выражение $g\left(z\right)$ определяет $n-$ аналитическую в D_1 функцию $g_1\left(z\right)$ и $n-$аналитическую в $D_1' \setminus \overline{D}_1$ функцию $g_2\left(z\right)$ и

$$\frac{\partial^k g_1(t)}{\partial \overline{z}^k} - \frac{\partial^k g_2(t)}{\partial \overline{z}^k} = f_k(t), \left(k = 0,1,...,n-1\right), t \in S_0. \qquad (14)$$

С другой стороны выражение для $g\left(z\right)$ равно выражению правой части (4), если заменим $w_{\overline{t}^k}(t)$ на $f_k(t)$ $\left(k = 0,1,...,n-1\right)$. Так как для точек $z \in D_1' \cap \left\{\left|z\right| > 1\right\}$ функция $\omega\left(z, \theta', \theta''\right)$ принимает значения больше единицы, то $g_2\left(z\right) = 0$. Отсюда следует

$$\frac{\partial^k g_2(t)}{\partial \overline{z}^k} = 0, \left(k = 0,1,...,n-1\right), t \in S_0.$$

Но тогда из (14) получим

$$\frac{\partial^k g_1(t)}{\partial \overline{z}^k} = f_k(t), \left(k = 0,1,...,n-1\right), t \in S_0.$$

Следовательно, $g_1\left(z\right)$ требуемая $n-$аналитическая функция $w\left(z\right)$.

Критерий разрешимости задачи аналитического продолжения впервые была получена в [3]. Теорема 2 является аналогом теоремы Фока-Куни для $n-$аналитических функций в круге.

Литература

1. Carleman, T. Les functions quasi analytiques[Text] / T. Carleman //. Gauthier-Villars, Paris, 1926

2. Teodoresku, N. La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique [Text] / N. Teodoresku // Gauthier-Villars, Paris, 1931

3. Фок, В. А. О введении “гасящей” функции в дисперсионные соотношения[Текст] / В.А. Фок, Ф.М. Куни //, Докл. АН СССР. 127(6), 1195–1196 (1959)

4. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мусхелишвили //М. Физматгиз, 1962. 600с

5. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М. М. Лаврентьев, В. Г.Романов, С. Шишатский // М.: Наука, 1980

6. Айзенберг, Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения [Текст] / Л. А. Айзенберг // Новосибирск: Наука, 1990

7. Балк, М. Б. Полианалитические функции и их обобщения [Текст] / М. Б. Балк // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления том 85, 187–246 (1991)

8. Heinrich, B. Boundary value problems for bipolyanalytic functions, Applicable Analysis[Text] / Heinrich Begehr, Ajay Kumar. // 85:9, 1045-1077 (2006)
9. Heinrich, B. A boundary value problem for Bitsadze equation in the unit disc[Text] / Heinrich Begehr //, Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 42, 177-183 (2007)
10. Ишанкулов, Т. Продолжение полианалитических функций[Текст] / Ишанкулов Т., Фозилов Д. Ш. // Известия вузов. Математика. 8, 37-45 (2021)