УДК 517.956.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_59

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Бозор Исломович, д.ф.-м.н., профессор,
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
islomovbozor@yandex.com
Аликулов Ёлкин Кодирович, д.ф.ф.-м. (PhD), и.о.доцент,
Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий и Нурафшонский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
aliqulov.yolqin.1984@mail.ru
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе формулируется и изучается задача с условиями Геллерстедта на разных характеристических плоскостях для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в трехмерной области. Основным методом исследования поставленной задачи является преобразование Фурье. На основе преобразования Фурье задача и уравнение сводится к плоскому аналогу задачи Геллерстедта со спектральным параметром, как в уравнении, так и в граничных условиях.*

Доказана единственность решения поставленной задачи с помощью нового принципа экстремума для нагруженных уравнений смешанного типа третьего порядка. Используя общего представления решения, доказывается существования решения задачи методом интегральных уравнений. Кроме того, изучено асимптотическое поведение решения задачи при больших значениях спектрального параметра. Найдены достаточные условия, при которых все операции законны.

Ключевые слова: *Уравнение третьего порядка, нагруженное уравнение, задача Геллерстедта, преобразование Фурье, регулярное решение, принцип экстремума, оценка решения.*

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED THIRD-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION IN AN INFINITE THREE DIMENSIONAL DOMAIN

Islomov Bozor Islomovich, Dr Sc, professor,
National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
islomovbozor@yandex.com
Alikulov Yolqin Kodirovich, PhD, a.a.professor,
Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi and Nurafshon branch of the Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
aliqulov.yolqin.1984@mail.ru
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we formulate and study the problem with Gellerstedt conditions on different characteristic planes for a loaded parabolic-hyperbolic equation of the third order in a three-dimensional domain. The main method of the study of the problem is the Fourier transform. Based on the Fourier transform, the problem and equation are reduced to a planar analogue of the Gellerstedt problem with a spectral parameter, both in the equation and in boundary conditions.*

The uniqueness of the solution of the problem is proved using a new extremum principle for loaded equations of mixed type of the third order. Using a general representation of the solution, the existence of a solution to the problem by the method of integral equations is proved. In addition, the asymptotic behavior of the solution of the problem for large values of the spectral parameter is studied. Sufficient conditions have been found under which all operations are legal.

Key words:. *Third-order equation, loaded equation, Gellerstedt problem, Fourier transform, regular solution, extremum principle, estimation of the solution.*

Рассмотрим уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_0, \\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $\Omega=\Omega_0\bigcup\Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup\Omega_3\bigcup\left(\bar{\Omega}_0\bigcap\bar{\Omega}_1\right)\bigcup\left(\bar{\Omega}_0\bigcap\bar{\Omega}_2\right)\bigcup\left(\bar{\Omega}_1\bigcap\bar{\Omega}_3\right)\bigcup$ $\bigcup\left(\bar{\Omega}_2\bigcap\bar{\Omega}_3\right)$ - область трёхмерного пространства (x,y,z), ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_0: x=0,\ 0\le y\le h,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ \Gamma_1: x=1,\ 0\le y\le h,\ \ z\in(-\infty,+\infty),$$

$$\Gamma_2: y=h,\ 0\le x\le 1,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ S_1: x+y=0,\ \ y\le 0,\ \ 0\le x\le\frac{x_0}{2},\ \ z\in(-\infty,+\infty),$$

$$S_2: x-y=x_0,\ \ y\le 0,\ \ \frac{x_0}{2}\le x\le x_0,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ S_3: x+y=x_0,\ y\le 0,\ x_0\le x\le\frac{1+x_0}{2},\ \ z\in(-\infty,+\infty),$$

$$S_4: x-y=1,\ \ y\le 0,\ \ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ \ z\in(-\infty,+\infty),\ \ x_0\in[0,1],$$

где

$$\mu=const<0 \qquad (2)$$

Уравнения (1) является параболическим и гиперболическим в областях Ω_0 и $\Omega_j\ \ (j=\overline{1,3})$ соответственно.

Введём обозначения: $A(0,0,z)=\bar{S}_0\cap\bar{S}_1,\ \ E(x_0,0,z)=\bar{S}_2\cap\bar{S}_3,$

$$C_1\left(\frac{x_0}{2};-\frac{x_0}{2};z\right)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_2,\quad C_2\left(\frac{x_0+1}{2};\frac{x_0-1}{2};z\right)=\bar{S}_3\cap\bar{S}_4,\quad B(1,0,z)=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_4,$$

$$\Omega_0=\Omega\bigcap\{\ (x,y,z): x>0,\ \ y>0,\ \ z\in(-\infty,+\infty)\},\ \Omega_1=\Delta AC_1E,\ \ \Omega_2=\Delta EC_2B,\ \ \Omega_3=\square C_1EC_2B,$$

$$I_0=\left\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ \ y=0,\ \ z\in(-\infty,+\infty)\right\},\ I_1=\left\{(x,y,z):\ 0<x<x_0,\ \ y=0,\ \ z\in(-\infty,+\infty)\right\},$$

$$I_2=\left\{(x,y,z):\ x_0<x<1,\ \ y=0,\ \ z\in(-\infty,+\infty)\right\},\ l_0=\bar{\Gamma}_0\cap\bar{S}_1,\ l_1=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_4,\ \ l_2=\bar{S}_2\cap\bar{S}_3,$$

$$D=\Omega\bigcap\{z=0\},\ \ D_i=\Omega_i\bigcap\{z=0\},\ \ (i=\overline{0,3}),\ \sigma_j=S_j\bigcap\{z=0\},\ (j=\overline{1,4}),\ \gamma_i=\Gamma_i\bigcap\{z=0\},\ (i=\overline{0,2})\ ,$$

$$J_j=I_j\bigcap\ \{z=0\},\ \left(j=\overline{0,2}\right),\ E_1\left(x_0,0\right)=\bar{J}_1\bigcap\bar{J}_2,\ \bar{J}_0=\bar{J}_1\bigcup\bar{J}_2\,.$$

Определение 1. $L(-\infty,+\infty)-$множество функций $\mathrm{H}(x,y,z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Определение 2. Функция $U(x,y,z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty)$;

2) $U_x(x,y,z),\ U_y(x,y,z),\ U_z(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty),$ кроме того, функции $U_x(x,y,z)$ и $U_y(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях $l_0,\ l_1$ и l_2;

3) $U_{xxx},\ U_{xzz}\in C(\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\cap L(-\infty,+\infty),\quad U_{xy}\in C(\Omega_0)\cap L(-\infty,+\infty),$ $U_{xyy}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\cap L(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет уравнению (1).

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача AG. Требуется найти в области Ω регулярное решение $U(x,y,z)$

уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U\big|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),\quad U\big|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\ 0\le y\le h,\ z\in(-\infty,+\infty),\tag{3}$$

$$U_x\big|_{\Gamma_0}=\Psi_1(y,z),\quad 0\le y\le h,\ z\in(-\infty,+\infty),\tag{4}$$

$$U\big|_{S_2}=\Psi_2(x,z),\ \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{S_2}=\Psi_3(x,z),\ \frac{x_0}{2}\le x\le x_0,\ z\in(-\infty,+\infty),\tag{5}$$

$$U\big|_{S_3}=\Psi_4(x,z),\ \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{S_3}=\Psi_5(x,z),\ x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2},\ z\in(-\infty,+\infty),\tag{6}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=\lim_{|z|\to\infty}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=0,\tag{7}$$

где $n-$внутренняя нормаль, $\Phi_0(y,z),\ \Phi_1(y,z),\ \Psi_j(x,z),\ (j=\overline{1,5})-$ заданные функции, причем $\Psi_2(x_0,z)=\Psi_3(x_0,z)=0,\ \Phi_0(h,z)=\Psi_1(0,z),\quad \Phi_1(h,z)=\Psi_1(1,z),$

$$\Phi_j(y,z)\in C\big([0;h]\times R\big)\cap L(-\infty,+\infty),\quad \Phi'_{jy}(y,z)\in C\big((0;h)\times R\big)\cap L(-\infty,+\infty),\ (j=0,1),$$

$$\Psi_1(y,z)\in C\big([0,h]\times R\big)\cap C^2\big((0,h)\times R\big)\cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_2(x,z)\in C^2\left(\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(\frac{x_0}{2},x_0\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_3(x,z)\in C^1\left(\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(\frac{x_0}{2},x_0\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_3(x,z)\in C^2\left(\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(x_0,\frac{x_0+1}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\Psi_5(x,z)\in C^1\left(\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(x_0,\frac{x_0+1}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty),$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Phi_i(y,z)=0,\ \forall y\in[0,h],(i=0,1),\tag{8}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Psi_k(x,z)=0,\ \forall x\in\left[x_0,\frac{x_0}{2}\right](k=2,3),\ \ \lim_{|z|\to\infty}\Psi_m(x,z)=0,\ \forall x\in\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right](m=4,5).\tag{9}$$

О предположениях относительно поведения функций $U(x,y,z)$ мы можем ввести следующие преобразования Фурье по переменной *z*:

$$u(x,y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,y;z)e^{i\lambda z}dz.\tag{10}$$

Если функция

$$U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y;\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda\tag{11}$$

является решением задачи AG, то функция $u(x,y;\lambda)$ должна быть регулярным решением задачи AG_λ.

Применяя преобразование Фурье (11) к уравнению (1) и задачу AG, получим следующее уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} u_y-u_{xx}+\lambda^2 u-\mu\, u(x,0,\lambda), & x>0, \quad y>0, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2 u-\mu\, u(x,0,\lambda), & x>0, \quad y<0, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty) \end{cases} \qquad (12)$$

и **задаче** AG_λ **:** Определить функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что

1) $u(x,y,\lambda)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1(D)$;

2) $u(x,y,\lambda)$ является регулярным решением уравнения (12) в областях D_k, $(k=\overline{0,3})$;

3) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u\big|_{\gamma_0}=\varphi_0(y,\lambda),\ u\big|_{\gamma_1}=\varphi_1(y,\lambda), \quad 0\le y\le h, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (13)$$

$$u\big|_{\gamma_2}=\psi_1(x,\lambda), \quad 0\le x\le 1, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (14)$$

$$u\big|_{\sigma_2}=\psi_2(x,\lambda),\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\sigma_2}=\psi_3(x,\lambda), \frac{x_0}{2}\le x\le x_0, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (15)$$

$$u\big|_{\sigma_3}=\psi_4(x,\lambda),\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\sigma_3}=\psi_5(x,\lambda), x_0\le x\le \frac{x_0+1}{2}, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \qquad (16)$$

где $\varphi_0(y,\lambda),\ \varphi_1(y,\lambda),\ \psi_j(x,\lambda),\ (j=\overline{1,3})-$ заданные функции, причем

$$\varphi_i(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_i(y,z)e^{i\lambda z}dz,\ (i=0,1),\ \psi_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_j(x,z)e^{i\lambda z}dz,\ (j=\overline{1,5}), \qquad (17)$$

и

$$\psi_2(x_0,\lambda)=\psi_3(x_0,\lambda),=0\ \varphi_0(h,\lambda)=\psi_1(0,\lambda),\ \boldsymbol{\varphi_1(h,\lambda)=\psi_1(1,\lambda)}, \qquad (18)$$

$$\varphi_i(y,\lambda)\in C\left[0;h\right]\cap C^1(0,h),\ (i=0,1), \qquad (19)$$

$$\psi_1(x,\lambda)\in C[0,1]\cap C^3(0,1), \qquad (20)$$

$$\psi_2(x,\lambda)\in C^2\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\cap C^3\left(\frac{x_0}{2},x_0\right), \psi_3(x,\lambda)\in C^1\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]\cap C^3\left(\frac{x_0}{2},x_0\right), \qquad (21)$$

$$\psi_4(x,\lambda)\in C^2\left[x_0;\frac{1+x_0}{2}\right]\cap C^3\left(x_0;\frac{1+x_0}{2}\right), \psi_5(x,\lambda)\in C^1\left[x_0;\frac{1+x_0}{2}\right]\cap C^3\left(x_0;\frac{1+x_0}{2}\right). \qquad (22)$$

Любое регулярное решение уравнения (12) представимо в виде[1],[2]:

$$u(x,y;\lambda)=\upsilon(x,y;\lambda)+\omega(y;\lambda), \qquad (23)$$

где $\upsilon(x,y,\lambda)$ $-$ решение уравнения

$$0=\begin{cases} \upsilon_y-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon-\mu\,\upsilon(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_0, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \\ \upsilon_{yy}-\upsilon_{xx}+\lambda^2\upsilon-\mu\,\upsilon(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_1\cup D_2\cup D_3, \ \lambda\in(-\infty,+\infty), \end{cases} \qquad (24)$$

здесь

$$\omega(y;\lambda)=\begin{cases}\omega_0(y;\lambda),\ y\in[0,h],\\ \omega_1(y;\lambda),\ y\in\left[-\frac{x_0}{2},0\right],\\ \omega_2(y;\lambda),\ y\in\left[\frac{x_0-1}{2},0\right],\end{cases} \tag{25}$$

а $\omega_i(y,\lambda)\ (i=\overline{0,2})-$произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции [3], [4] причем без ограничения общности можем полагать, что

$$\omega_0(0;\lambda)=\omega_0(1;\lambda)=0,\quad \omega_1(0;\lambda)=\omega_1(x_0;\lambda)=0,\quad \omega(x_0;\lambda)=\omega(1;\lambda)=0. \tag{26}$$

В силу представления (23) с учетом (25), задача AG_λ редуцируется к задаче AG_λ^* нахождения регулярного в области D решения $\upsilon(x,y;\lambda)$ уравнения (24), удовлетворяющего условиям

$$\upsilon\big|_{\gamma_0}=\varphi_0(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda),\quad \upsilon\big|_{\gamma_1}=\varphi_1(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda),\quad 0\le y\le h,\ \ \lambda\in R, \tag{27}$$

$$\upsilon_x\big|_{\gamma_2}=\psi_1(y;\lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in R, \tag{28}$$

$$\upsilon\big|_{\sigma_2}=\psi_2(x;\lambda)-\omega_1(x-x_0;\lambda),\ \ x_0/2\le x\le x_0,\ \lambda\in R, \tag{29}$$

$$\upsilon_n\big|_{\sigma_2}=\psi_3(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1'(x-x_0;\lambda),\ \ x_0/2\le x\le x_0,\ \lambda\in R, \tag{30}$$

$$\upsilon\big|_{\sigma_3}=\psi_4(x;\lambda)-\omega_2(x_0-x;\lambda),\ \ x_0\le x\le (x_0+1)/2,\ \lambda\in R, \tag{31}$$

$$\upsilon_n\big|_{\sigma_3}=\psi_5(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_2'(x_0-x;\lambda),\quad x_0\le x\le (x_0+1)/2,\ \lambda\in R, \tag{32}$$

где $\omega_i(y;\lambda)\ (i=\overline{0,2})-$пока неизвестная функция.

Применяя метод, использованный в работе [5], любое регулярное решение уравнения (24) представим в виде

$$\upsilon(x,y,\lambda)=w(x,y,\lambda)+\vartheta(x,\lambda), \tag{33}$$

где $w(x,y,\lambda)$ $-$ решение уравнения

$$0=\begin{cases}w_y-w_{xx}+\lambda^2 w & в\ D_0,\\ w_{yy}-w_{xx}+\lambda^2 w & в\ D_j\ (j=\overline{1,3}),\end{cases} \tag{34}$$

а $\vartheta(x,\lambda)-$решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\vartheta''(x,\lambda)-\left(\lambda^2-\mu\right)\vartheta(x,\lambda)=-\mu w(x,0,\lambda),\ 0<x<1, \tag{35}$$

где $\vartheta(x,\lambda)=\vartheta_0(x,\lambda),\ x\in\bar J_0,\ \vartheta(x,\lambda)=\vartheta_1(x,\lambda),\ x\in\bar J_1,\ \vartheta(x,\lambda)=\vartheta_2(x,\lambda),\ x\in\bar J_2.$

Замечание 1. Учитывая, что функция $a_j ch\lambda x+b_j sh\lambda x,\ \ (j=\overline{0,2})$ удовлетворяет уравнению (34), при исследовании задачи AG^*_λ без ограничения общности можно предполагать, что

$$\vartheta_0(0,\lambda)=\vartheta_0(1,\lambda)=0\,, \qquad (36_0)$$

$$\vartheta_1(0,\lambda)=\vartheta_1(x_0,\lambda)=0\,, \qquad (36_1)$$

$$\vartheta_2(x_0,\lambda)=\vartheta_2(1,\lambda)=0. \qquad (36_2)$$

Решение задач (35), (36_0); (35), (36_1) и (35), (36_2) соответственно представим в виде

$$\vartheta_0(x,\lambda)=\frac{\mu\, sh(x-1)\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\; sh\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_0^1 sh\, t\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_x^1 sh(x-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\, w(t,0,\lambda)dt, \quad 0\le x\le 1,$$

(37_0)

$$\vartheta_1(x,\lambda)=\frac{\mu\, sh(x-x_0)\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\, shx_0\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_0^{x_0} sh\, t\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\; w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_x^{x_0} sh(x-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\, w(t,0,\lambda)dt, \quad 0\le x\le x_0 \qquad (37_1)$$

и

$$\vartheta_2(x,\lambda)=\frac{\mu shx_0\sqrt{\lambda^2-\mu}\; ch\, x\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu} sh\left(x_0-1\right)\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_{x_0}^1 sh(1-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\, w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu\, chx_0\sqrt{\lambda^2-\mu}\;\, shx\sqrt{\lambda^2-\mu}}{\sqrt{\lambda^2-\mu}\; sh(x_0-1)\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_{x_0}^1 sh(1-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\, w(t,0,\lambda)dt-$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu}}\int_{x_0}^{x} sh(x-t)\sqrt{\lambda^2-\mu}\, w(t,0,\lambda)dt, \quad x_0\le x\le 1\,.$$

(37_2)

В силу представления (33) с учетом (36_0), (36_1), (36_2) задача $AG^*{}_\lambda$ редуцируется к задаче $AG^*_{1\lambda}$ нахождения в области D регулярного решения $w(x,y,\lambda)$ уравнения (34), удовлетворяющего условиям

$$w\big|_{\gamma_0}=\varphi_1(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda),\quad w\big|_{\gamma_1}=\varphi_1(y;\lambda)-\omega_0(y;\lambda),\quad 0\le y\le h, \qquad (38)$$

$$w_x\big|_{\gamma_2}=\psi_1(y,\,\lambda)-\vartheta_0'(x,\lambda),\quad 0\le x\le 1, \qquad (39)$$

$$w\big|_{\sigma_2}=\psi_2(x;\lambda)-\omega_1(x-x_0;\lambda)-\vartheta_1(x,\lambda),\quad \frac{x_0}{2}\le x\le x_0,, \qquad (40)$$

$$w_n\big|_{\sigma_2}=\psi_3(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1'(x-x_0;\lambda)-\frac{1}{\sqrt{2}}\vartheta_2'(x,\lambda),\quad x_0/2\le x\le x_0, \qquad (41)$$

$$w\big|_{\sigma_3}=\psi_4(x;\lambda)-\omega_2(x_0-x;\lambda)-\vartheta_2(x,\lambda),\quad x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2}, \qquad (42)$$

$$w_n\Big|_{\sigma_3}=\psi_5(x;\lambda)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1'(x_0-x;\lambda)-\frac{1}{\sqrt{2}}\vartheta_2'(x,\lambda), \tag{43}$$

где $\vartheta_i(x,\lambda),\,(i=\overline{0,2})$ определяются из (37_i) .

Для доказательства единственности решение задачи $AG,\ AG_\lambda$ и AG_λ^* играет важную роль следующая лемма.

Лемма 1. Если $\varphi_0(y,\lambda)\equiv\varphi_1(y,\lambda)\equiv 0,\ \forall y\in[0,h],\ \psi_1(y,\lambda)\equiv 0,\ \forall y\in\left[0,h\right],$ $\psi_2(x,\lambda)\equiv\psi_3(x,\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in\left[\frac{x_0}{2},x_0\right]$ и $\psi_4(x,\lambda)\equiv\psi_5(x,\lambda)\equiv 0,\ \ \forall x\in\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right],$ $\lambda\in(-\infty,+\infty)$, то

$$\tau_j(x,\lambda)\equiv 0,\ \forall x\in\bar{J}_j\quad (j=\overline{0,2}),$$

здесь $\tau_j(x,\lambda)=w(x,0,\lambda),\quad x\in\bar{J}_j.$

Лемма доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [6].

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1 и $\vartheta_j(x,\lambda)\equiv 0,\quad \forall\, x\in\bar{J}_j\quad (j=\overline{0,2}),$ то в области D соответственно задачи AG_λ^* и $AG_{1\lambda}^*$ для уравнения (24) и (34) может иметь не более одного решения.

Теорема 1 доказывается с помощью принципа экстремума для параболических уравнений [1], [7].

Теорема 2.Если выполнены условия теоремы 1, то в области Ω задача AG может иметь не более одного решения.

Используя представление решение (23) и (33) с учетом условия леммы 1 докажем единственность решения задачи AG для уравнения (1).

Теорема 3. Если выполнены условия (2), (18) - (22), то решение задачи AT_λ для уравнения (12) существует.

Теорема 3 доказывается методом интегральных уравнений [8].

Из теоремы 3 следует существование решения задачи AG для уравнения (1).

Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа[Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажонов // Ташкент: «Фан». 1986. 220 с.
2. Салахитдинов, М.С. Уравнения смешанно-составного типа[Текст] / М.С. Салахитдинов// Ташкент: «Фан». 1974. 156 с.
3. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа[Текст] / Т.Д. Джураев // Ташкент: «Фан». 1979. 240 с.
4. Islomov, B. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients[Text] / B.Islomov, U.I. Baltaeva // EJDE. Texas State University San Marcos, 2015. V. 2015. № 221. Pp. 1-10.
5. Исломов, Б. Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа[Текст] / Б.Исломов, Д.М. Курьязов // “Узбекский математический журнал”. 2000. № 2. С. 29-35.
6. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных[Текст] / А.В. Бицадзе // М.: Наука. 1981. 448 с.

7. Ильин, А.М., Линейные уравнения второго порядка параболического типа[Текст] / А.М.Ильин, А.С.Калашников, О.А.Олейник // ЖВМиМФ.1965. 4(6). С.1006-1024.
8. Islomov, B.I. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain [Text] / B.I.Islomov, Y.K. Alikulov //International journal of applied mathematics, 2021, Vol.34, No.2, pp.158-170.