МАТЕМАТИКА

УДК 517.97
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_80

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

Керимбеков Акылбек, д.ф.-м.н., профессор,
akl7@rambler.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина,
Бишкек, Кыргызстан
Баетов Авалкан Куканович к.ф.-м.н., доцент,
carterbek@mail.ru
Институт новых информационных технологий,
Кыргызского Государственного университета имени И. Арабаева
Доулбекова Салтанат Байызбековна, к.ф.-м.н., доцент,
doulbekova25@mail.ru
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *В статье исследованы вопросы разрешимости задачи оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма, при минимизации интеграла энергии управляющей силы. Исследование проводилось с использованием понятия обобщенного решения краевой задачи управляемого колебательного процесса. В задаче оптимизации требуется найти управление, которое переводит колебательный процесс из одного состояния в другое заданное состояние. В процессе исследования установлено, что искомое оптимальное управление определяется, как решение бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода и найдены достаточные условия существования решения этой некорректной задачи.*

Ключевые слова: *краевая задача, обобщенное решение, интеграл энергии, функционал, граничное управление, оптимальное управление.*

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕССИН ЧЕКТИК БАШКАРУУДА ЭНЕРГИЯНЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУ МЕНЕН ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИЛИШИ ЖӨНҮНДӨ

Керимбеков Акылбек, ф.-м.и.д., профессор,
akl7@ rambler.ru
Россия Федерациясынын биринчи президенти
Б. Н. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети
Бишкек, Кыргызстан
Баетов Авалкан Куканович ф.-м.и.к., доцент,
carterbek@mail.ru
И. Арабаев атындагы Кыргыз Мамлекеттик университети,

Жаны маалымат технологиялар институту
Доулбекова Салтанат Байызбековна, ф.-м.и.к., доцент,
doulbekova25@mail.ru
Россия Федерациясынын биринчи президенти
Б. Н. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Макалада башкаруу күчүнүн энергия интегралын минималдаштырууда Фредголмдун интегралдык операторун кармаган жекече туундулуу интегро-дифференциалык теңдемелер менен сүрөттөлгөн термелүү процессинин оптимизациялоо маселесинин чечилиши тууралуу суроолор изилденген. Изилдөө термелүү процессинин оптимизациялоо чектик маселесинин жалпыланган түшүнүгүн колдонуу менен жүргүзүлгөн. Оптималдаштыруу маселесинде термелүү процессин бир абалдан экинчи абалга өткөрүүчү башкарууну табуу талап кылынат. Изилдөөнүн жүрүшүндө изделген оптималдык башкарууну биринчи түрдөгү Фредгольмдун интегралдык теңдемелеринин чексиз өлчөмдүү системаларынын чыгарылышы катары табылды жана бул начар коюлган маселенин чыгарылышынын жашашы үчүн жетиштүү шарттар аныкталды.*

Урунттуу сөздөр: *чектик маселе, жалпыланган чыгарылыш, энергия интегралы, функционал, чектик башкаруу, оптималдуу башкаруу.*

ON THE SOLVABILITY OF THE OPTIMIZATION PROBLEM WITH MINIMUM ENERGY UNDER BOUNDARY CONTROL OF THE OSCILLATIONAL PROCESS

Kerimbekov Akylbek, Dr Sc, professor,
akl7@rambler.ru
Kyrgyz-Russian Slavic University
named after the first President of the Russian Federation B.N. Yeltsin
Baetov Avalkan Kukanovich,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor
carterbek@mail.ru
Institute of New Information Technologies,
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Doulbekova Saltanat Bayzbekovna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor
doulbekova25@mail.ru
Kyrgyz-Russian Slavic University
named after the first President of the Russian Federation B.N. Yeltsin,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract:: *The paper studies the solvability of the optimization problem for oscillatory processes described by partial integro-differential equations with an integral Fredholm operator while minimizing the energy integral of the control force. The study was carried out using the concept of a generalized solution of the boundary value problem of a controlled oscillatory process. In the optimization problem, it is required to find a control that transfers the oscillatory process from one state to another given state. In the course of the study, it was established that the desired optimal control is defined as a solution to an infinite-dimensional system of Fredholm integral equations of the first kind, and sufficient conditions for the existence of a solution to this ill-posed problem were found.*

Keywords: *boundary value problem, generalized solution, energy integral, functional, boundary control, optimal control.*

Постановка задачи оптимизации и ее разрешимость. Рассмотрим задачу граничного управления колебательными процессами, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^T u^2(t)dt, \tag{1}$$

энергии управления (управляющих сил) при переводе управляемого процесса, описываемого краевой задачей

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau) V(\tau, x) d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \tag{2}$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), \ V_t(0,x) = \psi_2(x), \ 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = u(t) \tag{4}$$

из начального состояния $V(0,x) = \varphi_1(x)$ в заданное другое положение

$$V(T,x) = \xi(x) \tag{5}$$

за заданное время T. $K(t,\tau)$–заданная функция, определенная в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t,\tau) d\tau dt = K_0 < \infty,$$

т.е. $K(t,\tau) \in H(D),$; $\xi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ заданные функции из пространства $H(0,1)$, причем функция $\psi_1(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка; λ-параметр, T-фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$, $H(Y)$ -гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Обобщенное решение краевой задачи. Известно [1,2], что краевая задача (2)-(4) при заданных условиях имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \tag{6}$$

где система функций $z_n(x) = \sqrt{\dfrac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots,$ опеделяется как решение краевой задачи

$$z_n''(x) + \lambda_n^2 z_n(x) = 0, \ z_n'(0) = 0, \ z_n'(1) + \alpha z_n(1) = 0,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg \lambda = \alpha$ и удовлетворяют следующим условиям

$$\lambda_n \le \lambda_{n+1}, \forall n = 1,2,3,..., \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \ (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n = 1,2,3,...;$$

А коэффициенты Фурье $V_n(t)$ определяются соотношениями

$$V_n(t) = \psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T D_n(t,\tau,\lambda) z_n(1) u(\tau) d\tau, \tag{7}$$

$$\psi_n(t,\lambda) = \psi_n \left[\cos \lambda_n s + \lambda \int_0^t B_n(t,s,\lambda) cos \lambda_n s ds \right] + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \left[\sin \lambda_n t + \lambda \int_0^t B_n(t,s,\lambda) \sin \lambda_n s ds \right], \tag{8}$$

$$D_n(t,s,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t-\tau)+\lambda\int\limits_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & 0\le\tau\le t,\\ \int\limits_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & t\le\tau\le T,\end{cases} \tag{9}$$

$$B_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,... \tag{10}$$

-резольвента ядра

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ \ K_n(0,s)=0,$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots,$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}&K_{n,i+1}(t,s)=\int\limits_0^T K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau,\quad i=1,2,3,...,\\ &K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s).\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно равенствам (10) -(11) имеет место следующая оценка

$$\left|B_n(t,s,\lambda)\right|\le\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}}\cdot\sqrt{\int\limits_0^T K^2(\tau,s)d\tau}, \tag{12}$$

которая выполняется для значений λ удовлетворяющих следующего неравенства

$$|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1,\quad n=1,2,3,.... \tag{13}$$

Используя неравенства (12) получаем оценку:

$$\int\limits_0^T\left|B_n(t,s,\lambda)\right|^2ds\le\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}, \tag{14}$$

Ряд Неймана (10) абсолютно сходится при каждом фиксированном $n=1,2,3,...$ для значений параметра λ удовлетворяющих условию

$$\lambda<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}. \tag{15}$$

Заметим. что радиус сходимости $|\lambda|<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}$. ряда Неймана увеличивается с ростом n и резольвента $B_n(t,s,\lambda)$ является непрерывной функцией, как сумма абсолютно сходящегося ряда. Отметим, что при значениях параметра $|\lambda|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}$. ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции для любого (!) $n=1,2,3,\dots$.

Доказано, что построенная функция $V(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$ и обобщенным решением краевой задачи (2) -(4).

Решение задачи оптимизации. Обобщенное решение (6) подставляем в (5) после не сложных вычислений получим уравнение

$$\int_0^T a_n(\eta)u(\eta)d\eta = h_n, \qquad n = 1,2,3,\dots .$$

где

$$a_n(\eta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(T-\eta) + \lambda\int_\eta^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds\right)z_n(1); \qquad (16)$$

$$h_n = \xi_n - \varphi_{1n}\left[\cos\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n sds\right] - \frac{\varphi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T + \lambda\int_0^T B_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right]. \qquad (17)$$

Таким образом, искомое управление следует находить как решение системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эту систему, введя обозначения

$$a(t) = (a_1(t),\dots, a_n(t)\dots),$$

$$h = (h_1,\dots,h_n,\dots)$$

перепишем в матричной форме

$$\int_0^T a(t)u(t)dt = h. \qquad (18)$$

Теперь исследуем разрешимость интегрального уравнения (18).

Решение ищем в виде:

$$u(t) = a^*(t)\cdot\alpha + \beta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\alpha_k + \beta; \qquad (19)$$

где $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_2\\ \dots\end{pmatrix}$ -неизвестный вектор, а β -произвольне постоянное , символ * -знак транспонирования.

Подставляя (19) в (18) получим бесконечномерную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений вида :

$$\int_0^T \begin{pmatrix}a_1(t)\\ \vdots\\ a_n(t)\\ \dots\end{pmatrix}\cdot(a_1(t)\dots a_n(t)\dots)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_2\\ \dots\end{pmatrix}dt + \int_0^T \begin{pmatrix}a_1(t)\\ \vdots\\ a_n(t)\\ \dots\end{pmatrix}\cdot\beta dt = \begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_2\\ \dots\end{pmatrix} \qquad (20)$$

Введем бесконечномерную квадратную матрицу

$$A=\int_0^T a(t)\cdot a^*(t)dt=\int_0^T \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ \dots \end{pmatrix}\cdot(a_1(t)\dots a_n(t)\dots)dt=$$

$$=\begin{pmatrix} \int_0^T (a_1(t)\cdot a_1(t))dt & \dots & \int_0^T (a_1(t)\cdot a_n(t))dt & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \int_0^T (a_n(t)\cdot a_1(t))dt & \dots & \int_0^T (a_n(t)\cdot a_n(t))dt & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \end{pmatrix} \quad (21)$$

и

$$q=\int_0^T a(t)dt=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \\ \dots \end{pmatrix}$$

Систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (20) перепишем в матричной форме

$$A\alpha=H,\quad H(\beta)=h-\beta q, \quad (22)$$

Поскольку в системе (22) матрица A бесконечномерная, то при исследовании разрешимости системы (22) будем пользоваться вариационными методами, т.к. в этом случае методы решения конечномерных систем не пригодны. В этой связи ниже будем доказывать несколько утверждений:

Лемма 1. Вектор H является элементом пространства l_2.

Лемма 2. При любом $\alpha\in l_2$ вектор $A\alpha$ является элементом пространства l_2.

Доказательства лемм проводится непосредственно вычислением и не представляет труда.

Лемма 3. Бесконечномерная матрица A является положительно определенной.

Доказательство. Пусть $\gamma\in l_2$-произвольный элемент. Тогда для скалярного произведения в l_2 имеет место неравенство

$$\langle A\gamma,\gamma\rangle=\gamma^*A\gamma=\gamma^*\int_0^T a(t)dt\cdot\gamma \;=\int_0^T \gamma^*a(t)a^*(t)\gamma dt=\int_0^T \left\|a^*(t)\gamma\right\|^2 dt\ge 0,$$

Откуда следует положительность матрицы A. Далее из равенства

$$\left\|a^*(t)\gamma\right\|^2=0,\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(t)\gamma_k\right)^2=0,$$

С учетом того, что функции $a_n(t),\quad n=1,2,3,\dots$ являются линейно независимыми на отрезке $[0,T]$, равенства $a_k(t)\gamma_k=0,$ выполняются тогда и только тогда когда все $\gamma_k=0,\quad k=1,2,3,\dots$. Следовательно, матрица A -является положительно определенной.

Теорема. Алгебраическая система (22) при каждом фиксированном β имеет единственное решение в простанстве l_2.

Доказательство. В пространстве l_2 определим оператор $D[\alpha] = A\alpha$, $D : l_2 \to l_2$. Тогда оператор $D[\alpha]$ является положительно -определенным, что следует из Леммы 3, т.е.

$$\langle \alpha, D(\alpha) \rangle_{l_2} = \langle \alpha, A\alpha \rangle = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} \alpha_i \alpha_k \geq 0.$$

Оператор $D[\cdot]$ является линейным, т.е. для любых произвольных поятоянных C_1 и C_2 и произвольных векторов $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ пространства l_2 имеет равенства

$$D\left[C_1\alpha^{(1)} + C_2\alpha^{(2)}\right] = C_1 D[\alpha^{(1)}] + C_2 D[\alpha^{(2)}].$$

Из линейности следует, что оператор $D[\alpha]$ является взаимно -однозначным оператором. Следовательно, существует обратный оператор $D^{-1}[\alpha]$, который согласно теороеме из функционального анадлиза [3] является ограниченным оператором, т.е. оценка

$$\left\| D^{-1}[\alpha] \right\|_{l_2} \leq D_0 \left\| \alpha \right\|_{l_2}, \quad D_0 > 0 \text{ -постоянная} \tag{23}$$

имеет место для любого вектора $\alpha \in l_2$.

Таким образом, решение уравнения (22) определяется по формуле

$$\alpha = D^{-1}[H] = D^{-1}[h + \beta q]$$

Это решение подставляя в (19) получим решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (18) в виде

$$u(t) = a^*(t) \cdot \alpha + \beta = a^*(t) D^{-1}[h + \beta q] + \beta, \tag{24}$$

где β -произвольная постоянная.

Таким образом, установлено, что интегральное уравнение (18) имеет бесконечно много решений вида (24), среди которых может быть искомое управление $u^0(t)$, минимизирующее функционал (1).

Далее, для определения управления $u^0(t)$ рассмотрим функционал

$$J[u(t,\beta)] = \int_0^T u^2(t,\beta)dt = \int_0^T \left(a^*(t) D^{-1}[h + \beta q] + \beta \right)^2 dt, \tag{25}$$

и параметр β находим как решение экстремальной задачи вида

$$\Phi(\beta) = J[u(t,\beta)] \to \min, \quad \beta \in R, \tag{26}$$

Поскольку решается задача на безусловный экстремум, то для функции

$$\Phi(\beta) = \int_0^T u^2(t,\beta)dt = \int_0^T \left[a^*(t) D^{-1}\left[h\right] + \beta(1 + a^*(t) D^{-1}[q]) \right]^2 dt;$$

применяя классический метод решения, находим сначала критическую точку из условия

$$\Phi'(\beta) = 2\int_0^T \left[a^*(t) D^{-1}\left[h\right] + \beta(1 + a^*(t) D^{-1}\left[q\right]) \right] \left(1 + a^*(t) D^{-1}[q]\right) dt =$$

$$= 2\int_0^T a^*(t) D^{-1}\left[h\right] \left(1 + a^*(t) D^{-1}[q]\right) dt + 2\beta \int_0^T \left(1 + a^*(t) D^{-1}[q]\right)^2 dt = 0;$$

т.е. критической точкой является

$$\beta^0 = -\frac{\int_0^T a^*(t)D^{-1}\left[h\right]\left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)dt}{\int_0^T \left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)^2 dt} \tag{27}$$

Далее, из неравенства

$$\Phi''\left(\beta\right) = 2\int_0^T \left[a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta(1+a^*(t)D^{-1}\left[q\right])\right]\left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)dt =$$

$$= 2\int_0^T \left(1+a^*(t)D^{-1}[q]\right)^2 dt > 0;$$

Следует, что значение β^0 является точкой минимума функции $\Phi\left(\beta\right)$,

тогда для любого управления имеет место неравенство

$$J[u(t,\beta^0)] \le J[u(t,\beta)].$$

Причем, равенсто имеет место лишь при $\beta = \beta^0$. Таким образом, искомое управление $u^0(t)$ на котором функционал (1) принимает наименьшее возможное значение определяется по формуле

$$u^0(t) = a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta^0(1+a^*(t)D^{-1}\left[q\right]). \tag{28}$$

Теперь проверим, что найденное оптимальное управление $u^0(t)$ является элементом гильбертового пространства $H(0,T)$ квадратично суммируемых функций, т.е. является допустимум управлением. Это следует из неавенства

$$\left\|u^0(t)\right\|^2_{H[0,T]} = \int_0^T \left(u^0(t)\right)^2 dt = \int_0^T \left(a^*(t)D^{-1}\left[h\right] + \beta^0(1+a^*(t)D^{-1}\left[q\right])\right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\left|\left\langle a(t), D^{-1}\left[h\right]\right\rangle\right|^2 + 2\beta^{02}\left(1+\left|\left\langle a(t), D^{-1}\left[q\right]\right\rangle\right|^2\right)\right)dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\left\|a(t)\right\|^2_{l_2}, D_0^2\left\|h\right\|^2_{l_2} + 2\beta^{02}\left(1+\left\|a(t)\right\|^2_{l_2} D_0^2\left\|q\right\|^2_{l_2}\right)\right)dt < \infty,$$

которое имеет место в силу следующих соотношений:

Заключение.

В заключение отметим, что полученные результаты может быть использованы на производстве, а также при разработке новых методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Рассматриваемая задача оптимизации является не корректной, что следует из системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, поэтому полученные результаты в частности разработанный алгоритм построения решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода представляет практический и теоретический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами -М.: Наука, 1978.-500с.

2. Керимбеков А., Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные

науки. Механика, -2020, Т.132, №3. –С. 6-16.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.-М.: Наука, 1965.-520с.