МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_75

БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ГЕРАСИМОВА-КАПУТО

Исломов Бозор Исломович, д.ф.-м.н., профессор,
islomovbozor@yandex.com
Ахмадов Илхом Али угли, аспирант,
ahmadov.ilhom@mail.ru
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека,
г. Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной работе изучается краевой задаче со смещением для смешанного параболо-гиперболического уравнения с оператором дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто. Доказана теорема существования и единственности сильного решения поставленной задачи. Получена оценка решения. Кроме того, доказаны полнота и базисность по Риссу системы корневых функций краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения смешанного типа дробного порядка.*

Ключевые слова: *задача со смещением, базисности корневых функций, базисность по Риссу, параболо-гиперболического уравнения, уравнения с оператором Герасимова-Капуто, собственных и присоединенных функций, классическое решение, сильное решение.*

THE RIESZ BASIS PROPERTY OF THE SYSTEM OF ROOT FUNCTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SHIFT FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH THE GERASIMOV-CAPUTO OPERATOR

Islomov Bozor Islomovich, Dr Sc, professor,
islomovbozor@yandex.com
Akhmadov Ilkhom Ali ugli, post-graduate student, ahmadov.ilhom@mail.ru
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

***Abstract**: In this paper, we study a boundary value problem with a shift for a mixed parabolic-hyperbolic equation with a fractional order operator in the sense of Gerasimov-Caputo. The theorem of existence and uniqueness of a strong solution of the formulated problem is proved. An estimate of the solution is obtained. In addition, the completeness and Riesz basis property of a system of root functions of a boundary value problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation of mixed type of fractional order is proved.*

***Keywords**: problem with shift, basis property of root functions, Riesz basis property, parabolic-hyperbolic equation, equation with Gerasimov-Caputo operator, eigenfunctions and associated functions, classical solution, strong solution.*

1. Введение

Впервые 1962 году краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничным условием, связывающим значения искомой функции на двух независимых характеристиках в гиперболической части области, была сформулирована и исследована в работе [1].

В работах [2]-[3] А.М. Нахушев исследовал нелокальные краевые задачи (задачи со смещением) для вырождающегося уравнения гиперболического и смешанного типов.

Спектральным вопросам дифференциальных операторов и базисности корневых функций краевых задач посвящены работы [4-6]. А.С. Бердышев [7] доказал базисность по Риссу системы корневых функций краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения смешанного типа второго порядка.

Спектральные вопросы краевых задач для параболо-гиперболического уравнения с оператором Герасимова-Капуто не изучены.

В настоящей работе изучается краевой задаче со смещением для смешанного параболо-гиперболического уравнения с оператором дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто. Доказывается базисности системы корневых (собственных и присоединенных) функций поставленной задачи.

2. Постановка и разрешимость задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками прямых $AA_1: x=0,\ A_1B_1:\ y=1,\ BB_1:\ x=1$, а при $y<0$ характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=-1$.

Рассмотрим уравнение

$$Lz(x,y)=g(x;y), \tag{1}$$

где

$$Lz(x,y)=\begin{cases} {}_cD_{0x}^{\alpha} z(x,y)-z_{yy}(x,y), & (x,y)\in\Omega_0, \\ z_{xx}(x,y)-z_{yy}(x,y), & (x,y)\in\Omega_1, \end{cases} \tag{2}$$

а ${}_cD_{0x}^{\alpha}[\bullet]$ – интегральный оператор дробного порядка α в смысле Герасимова-Капуто [8] и имеет вид:

$$ {}_cD_{0x}^{\alpha} h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{-\alpha} h'(t)dt, & 0<\alpha<1, \\ h'(x), & \alpha=1. \end{cases} \tag{3}$$

Задача S_α. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$z(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{4}$$

$$z_y(x,y)\big|_{y=1}=\beta^2\, z(x,y)\big|_{y=1},\quad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

$$\frac{dz\left[\theta_0(t)\right]}{dt}=\beta\,\frac{dz\left[\theta_1(t)\right]}{dt},\quad 0<t<1\,. \tag{6}$$

и на линии измененного типа удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} z(x,y)=\lim_{y\to-0} z(x,y),\quad (0,y)\in\bar{J},$$
$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha} z_y(x,y)=\lim_{y\to-0} z_y(x,y),\quad (0,y)\in J. \tag{7}$$

где $\theta_0(t)=\left(\frac{t}{2},-\frac{t}{2}\right)$; $\theta_1(t)=\left(\frac{t-1}{2},\frac{t+1}{2}\right)$ точки пересечения AC и AB с характеристиками $x-y=t$ и $x+y=t$ соответственно; β- произвольное комплексное число.

Введем обозначения

$\Omega_0=\Omega\cap\{x>0,\ y>0\}$, $\Omega_1=\Omega\cap\{x>0,\ y<0\}$, $J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}$.

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)-$пространство квадратично суммируемых функций.

Определение 1. Классическим решением задачи S_α назовем функцию из класса

$$\mathrm{P}_1=\left\{z(x,y):\ z(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C_y^2(\Omega_0)\cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1)\right\},$$

удовлетворяющую краевым условиям (4), (5) и (6) задачи S_α и обращающую уравнение (1) в тождество.

Заметим, что из класса $z(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$ с учетом (3) следует ${}_cD_{0x}^\alpha z\in C(\bar{\Omega}_1)$.

Определение 2. Функцию $z(x,y)\in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением задачи* S_α, если существует последовательность функций $z_n(x,y)\in P_1$, удовлетворяющую краевым условиям (4), (5), (6) задачи S_α, такая, что последовательности $z_n(x,y)$ и $Lz_n(x,y)$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к функциям $z(x,y)$ и $g(x,y)$ соответственно, т.е.

$$\|z_n(x,y)-z(x,y)\|_0\to 0,\quad \|Lz_n(x,y)-g(x,y)\|_0\to 0,\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $\beta\neq 0$ *и при всех* $k\in Z$ *выполнено условие*

$$\lambda_k(1-\beta)\Gamma(\alpha)+\lambda_k{}^2\neq 0, \tag{9}$$

где λ_n *- собственные значения* $\operatorname{ctg}\lambda=\beta^2\lambda$ *уравнением.*

Тогда для любой функции $g(x,y)\in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи S_α существует, единственно, удовлетворяет неравенству

$$\|z(x,y)\|_0\le c\|g(x,y)\|_0. \tag{10}$$

и представимо в виде

$$z(x,y)=\iint_\Omega K(x,y,x_1,y_1)g(x_1,y_1)dx_1dy_1, \tag{11}$$

где $K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta\neq 0$ *и выполнены условия (9). Тогда система корневых функций задачи* S_α *полна и образует базис Рисса в* $L_2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. // "Учен. зап. Казан. ун-та".1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.

2. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения. // "Докл. АН СССР". 1969. Т. 187. № 4. С. 736–739.
3. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. // "Дифференциальные уравнения". 1969. Т.5. № 1. С. 44–59.
4. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
5. Моисеев В. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
6. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной. // "Дифференц. уравнения". 1994. **30**(1). С.128–143
7. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанного-составного типов. Алматы. 2015. 224 с.
8. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.