

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

д.ф.-м.н., профессор

Ошский государственный университет

dtursunov@oshsu.kg

<https://orcid.org/0000-0002-6990-1742>

Сулайманов Завур Мамадалиевич

Преподаватель

Ошский государственный университет

szavur1983@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0009-5355-1459>

В статье исследуется двухточечная краевая задача для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром ε под знаком старшей производной искомой функций. Рассматриваемое уравнение задано в виде $\varepsilon y''(x) + \chi y'(x) - \chi y(x) = f(x, \varepsilon)$, $-1 < x < 1$, и граничные условия $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$. Подобные задачи встречаются в физике, технике, биологии, экономике и других областях науки. Особенности рассматриваемой задачи являются принадлежность к классу сингулярно возмущенных уравнений, а также то, что коэффициент соответствующего невозмущенного уравнения обращается нулю на рассматриваемом отрезке. Эти два фактора (сингулярное возмущение и внутренняя сингулярная точка) делают задачу бисингулярной и усложняют структуру решения. Однако отличие рассматриваемой задачи от других сингулярно возмущенных задач заключается в том, что на границе граничных точек не появляются пограничные слои. Слой образуется только в окрестности внутренней сингулярной точки $x=0$. В результате мы не можем записать решение рассматриваемой задачи с помощью одной функции, т.е. мы строим отдельные решения на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, т.е. строится составное решение. Каждый из них состоит из суммы двух функций: регулярной внешней части и внутреннего решения, описывающего слой на сингулярной точке. Цель исследования – построить равномерное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи с бисингулярным возмущением, на данном отрезке. Точность полученных асимптотических формул сравнивается с численными расчетами, выполненными в системе Maple на основе конкретного примера, и показано их асимптотическая близость.

Ключевые слова: двухточечная задача, бисингулярное возмущение, сингулярное возмущение, асимптотика, асимптотическое разложение, внутренний слой, сращивание.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BISINGULAR TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH AN INTERNAL LAYER

Dilmurat Abdillazhanovich Tursunov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Osh State University

dtursunov@oshsu.kg

<https://orcid.org/0000-0002-6990-1742>

Zavur Mamadalievich Sulaimanov

Lecturer

Osh State University

szavur1983@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0009-5355-1459>

This article studies a two-point boundary-value problem for a linear inhomogeneous second-order ordinary differential equation with a small parameter ε under the sign of the highest derivative of the unknown function. The equation under consideration is given in the form $\varepsilon y''(x) + xy'(x) - xy(x) = f(x, \varepsilon)$, $-1 < x < 1$, and the boundary conditions $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$. Similar problems are encountered in physics, engineering, biology, economics, and other fields of science. The peculiarities of the problem under consideration are that it belongs to the class of singularly excited equations, and that the coefficient of the corresponding unexcited equation vanishes on the interval under consideration. These two factors (singular perturbation and internal singular point) make the problem bisingular and complicate the structure of the solution. However, the difference between the problem under consideration and other singularly perturbed problems is that boundary layers do not appear on the boundaries of the boundary points. The layer is formed only in the neighborhood of the internal singular point $x=0$. As a result, we cannot write the solution to the problem under consideration using a single function, i.e. We construct individual solutions on the intervals $[-1, 0]$ and $[0, 1]$, i.e., a composite solution is constructed. Each solution consists of the sum of two functions: a regular external part and an internal solution describing the layer at the singular point. The goal of the study is to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to a two-point boundary value problem with a bisingular perturbation on a given interval. The accuracy of the resulting asymptotic formulas is compared with numerical calculations performed in Maple based on a specific example, and their asymptotic closeness is demonstrated.

Keywords: two-point problem, bisingular perturbation, singular perturbation, asymptotics, asymptotic expansion, internal layers, matching.

Введение. Теория сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений является одним из важнейших разделов современной математической физики и прикладного анализа. Задачи, содержащие малый параметр при старшей производной, описывают широкий класс процессов с быстрыми и медленными составляющими: пограничные слои в гидродинамике, контрастные структуры в химической кинетике, переходные режимы в электрических цепях, а также явления с локализованными внутренними перепадами [4]-[8], [14]-[17]. В таких задачах решение на малом интервале изменения независимой переменной может претерпевать резкие изменения, образуя так называемые *пограничные слои* (вблизи границ) или *внутренние слои* (в окрестности внутренней точки области) [1]-[11].

Особый интерес представляют краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\varepsilon y'' = f(x, y, \varepsilon), \quad x \in (a, b), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

с дополнительными условиями на концах отрезка. Когда вырожденное уравнение (при $\varepsilon=0$) имеет изолированное решение, которое теряет устойчивость или претерпевает бифуркацию, в решении полной задачи могут возникать *внутренние переходные слои* – области, где решение быстро переходит от одного устойчивого состояния к другому. Такие структуры называют *контрастными* или *ступенчатыми* [2]. Подобное явление ранее в линейных уравнениях не встречалось, все задачи в которых появились *контрастные (всплеск) явления были нелинейными*.

Исследованию асимптотики решений подобных задач посвящены работы многих авторов (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефёдова, С.А. Ломова, М.Г. Дмитриева и др.). В классическом методе пограничных функций строится равномерное асимптотическое приближение, содержащее быстро осциллирующие или быстро затухающие составляющие [2]-[8]. Однако при наличии внутреннего слоя возникает необходимость дополнительного согласования разложений слева и справа от точки перехода, что требует применения техник *сращения* или *метода сшивания асимптотических разложений* [18].

В данной статье рассматривается двухточечная краевая задача для сингулярно возмущённого обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, у которого вырожденное уравнение имеет разрывное решение, а точка разрыва расположена внутри рассматриваемого интервала.

Цель работы – построение полного асимптотического разложения решения, учитывающего внутренний слой в заданной точке. Для этого используется комбинация обобщенного метода пограничных функций с техникой сращивания асимптотических разложений решений.

Основные результаты состоят в следующем:

- установлены условия существования внутреннего переходного слоя;
- отсутствия пограничных слоёв на граничных точках;
- построены регулярные и сингулярные части асимптотики (внутренняя пограничная функция в окрестности особой точки $x=0$);
- доказана равномерная пригодность полученного асимптотического разложения;
- приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов с резкими внутренними перепадами, а также при разработке численных методов для сингулярно возмущённых задач.

Постановка задачи. Требуется построить полное асимптотическое разложение решения краевой задачи (1)-(2) с любой степенью точности по малому параметру, при стремлении малого параметра к нулю в рассматриваемом отрезке:

$$\varepsilon y''(x) + xy'(x) - xy(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (1)$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, x – действительная переменная, $f \in C^\infty[-1, 1]$.

Особенности рассматриваемой задачи:

В уравнении (1) малый параметр ε стоит при старшей (второй) производной искомой функции $y(x)$. Уравнения, обладающие такой особенностью, называют **сингулярно возмущёнными дифференциальными уравнениями типа Тихонова**. Ключевая особенность заключается в том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ порядок уравнения понижается: из уравнения второго порядка мы получаем уравнение первого порядка. Предельное (вырожденное) уравнение, вообще говоря, не в состоянии удовлетворить всем крайевым условиям, которые были заданы для исходной задачи.

Это несоответствие приводит к тому, что решение полной задачи в окрестности границ или внутри области претерпевает резкие изменения, образуя так называемые **пограничные слои**. В зависимости от структуры вырожденного уравнения и вида крайевых условий такие слои могут возникать как у границ интервала, так и в его внутренних точках. В последнем случае говорят о *внутреннем переходном слое* (или *контрастной структуре*).

Для построения асимптотического решения сингулярно возмущённых задач с пограничными слоями традиционно используются методы **пограничных функций** (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов) и **сращивания асимптотических разложений** (А.М. Ильин, Ван Дайк). В случае, когда точка перехода находится внутри области, требуется дополнительное согласование разложений, построенных слева и справа от неё, что существенно усложняет задачу.

Таким образом, изучение крайевых задач для сингулярно возмущённых уравнений второго порядка с внутренними слоями имеет важное теоретическое и прикладное значение, так как позволяет описывать процессы с резкими внутренними перепадами в физике, химии, биологии и технике.

Методы и методология исследования. При решении задачи (1)-(2) используются методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными условиями, а также асимптотические методы (метод малого параметра, обобщенный метод пограничных функций, метод сращивания). Основной идеей, т.е. методологией исследования является построение регулярных внешних решений и сращивать их с внутренними решениями [1], [9], [12]-[14], [18].

Решение задачи. В уравнении (1) при $\varepsilon=0$ получаем вырожденное уравнение

$$x\tilde{y}'(x) - x\tilde{y}(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (3)$$

для полученного уравнения точка $x=0$ является особой (сингулярной) точкой, так как не всегда $f_0(0)=0$. Если считать, что $x \neq 0$, то решение уравнения (3) можно представить в виде:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_0)e^{x-x_0} + \int_{x_0}^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau. \quad (4)$$

Функция $\tilde{y}(x)$ определенная равенством (4) при $x \rightarrow 0$ имеет особенность вида $\tilde{y}(x) = O(\ln |x|)$, т.е. точка $x=0$ является особой точкой для функций $\tilde{y}(x)$.

Поэтому нулевой приближение внешнего решения задачи (1)-(2) можно представить в виде:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \tilde{y}_0^{(-)}(x), & x \in [-1, 0), \\ \tilde{y}_0^{(+)}(x), & x \in (0, 1], \end{cases}$$

где

$$\tilde{y}_0^{(-)}(x) = \int_{-1}^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad \tilde{y}_0^{(+)}(x) = \int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau.$$

На основе двух отмеченных выше особенностей краевую задачу (1)-(2) можно назвать бисингулярной (двойной особенностью) задачей. Этот термин впервые был введен в науку академиком Арленом Михайловичем Ильиным [4]. Бисингулярные задачи исследуются многими учёными, поскольку они широко применяются в физике, технике и других науках [15]-[17].

Сначала построим внешнее решение. Внешнее решение будем искать в виде следующего ряда:

$$y^{\text{out}}(x) = \begin{cases} u^{(-)}(x), & -1 \leq x < 0, \\ u^{(+)}(x), & 0 < x \leq 1, \end{cases}, \quad (5)$$

где $u^{(-)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(-)}(x)$, $u^{(+)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(+)}(x)$, $u_k^{(\pm)}(x)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя ряд (5) в задачу (1)-(2) и применяя метод малого параметра имеем:

$$xu'_0(x) - xu_0(x) = f(x), \quad u_0(-1) = 0, \quad u_0(1) = 0, \quad (6)$$

$$xu'_k(x) - xu_k(x) = -u''_{k-1}(x), \quad u_k(-1) = 0, \quad u_k(1) = 0, \quad k \in N. \quad (7)$$

Используя формулу (4) запишем решения задач (6) и (7) в виде:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^{(-)}(x), & x \in [-1, 0), \\ u_0^{(+)}(x), & x \in (0, 1], \end{cases} \quad u_k(x) = \begin{cases} u_k^{(-)}(x), & x \in [-1, 0), \\ u_k^{(+)}(x), & x \in (0, 1], \end{cases}$$

где

$$u_0^{(-)}(x) = \int_{-1}^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad u_0^{(+)}(x) = \int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau;$$

$$u_k^{(-)}(x) = -\int_{-1}^x \frac{u_{k-1}^{(-)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad u_k^{(+)}(x) = -\int_1^x \frac{u_{k-1}^{(+)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau.$$

В окрестности особой точки $x=0$ выделим особенности рядов $u^{(-)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(-)}(x)$ и

$$u^{(+)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(+)}(x):$$

$$u^{(-)}(x) = a_0(x) + \alpha_0 \ln|x| + \frac{\varepsilon}{x^2} (a_1(x) + \alpha_1 x^2 \ln|x|) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{x^{2n}} (a_n(x) + \alpha_n x^{2n} \ln|x|) + \dots,$$

$$u^{(+)}(x) = b_0(x) + \beta_0 \ln|x| + \frac{\varepsilon}{x^2} (b_1(x) + \beta_1 x^2 \ln|x|) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{x^{2n}} (b_n(x) + \beta_n x^{2n} \ln|x|) + \dots,$$

где $a_k, b_k \in C^\infty[-1,1]$, $b_k(1)=0$, $a_k(-1)=0$, $k \in N_0 = \{0,1,2,\dots\}$, $\alpha_k, \beta_k = \text{const}$.

Из последних построенных рядов $u^{(+)}(x)$ и $u^{(-)}(x)$ следует, что для построения внутреннего решения необходимо использовать преобразование $x = \mu t$, где t – новая переменная, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, внешнее решение теряет свой асимптотический характер в особой точке $x=0$ и в её окрестности, и не может являться решением краевой задачи (1)–(2).

Решение задачи (1)–(2) включающую особую точку будем искать в виде:

$$y(x, \varepsilon) = v(x, \varepsilon) + w(t, \mu), \quad (8)$$

где $v(x, \varepsilon)$ – регулярное внешнее решение, не имеет никаких особенностей, $w(t, \mu)$ – внутреннее решение в окрестности особой точки $x=0$.

Подставляя соотношение (8) в задачу (1)–(2) имеем:

$$\varepsilon v''(x) + x v'(x) - x v(x) = f(x) - h(\varepsilon), \quad x \in (-1,1), \quad (9)$$

$$v(-1) = 0, \quad v(1) = 0, \quad (10)$$

$$w''(t) + t w'(t) - t \mu w(t) = h(\mu^2), \quad t \in (-1/\mu, 1/\mu), \quad (11)$$

$$w(-1/\mu) = 0, \quad w(1/\mu) = 0. \quad (12)$$

Начнем с задачи (9)–(10). Решение этой задачи будем искать в виде:

$$v(x) = \begin{cases} v^{(-)}(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ v^{(+)}(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}, \quad (13)$$

$$\text{где } v^{(-)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(-)}(x), \quad v^{(+)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(+)}(x).$$

Подставляя соотношение (13) в задачу (9)–(10) имеем простую систему рекуррентных соотношений:

$$x v_0'(x) - x v_0(x) = f(x) - h_0, \quad v_0(-1) = 0, \quad v_0(1) = 0, \quad (14)$$

$$x v_k'(x) - x v_k(x) = -h_k - v_{k-1}''(x), \quad v_k(-1) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad k \in N. \quad (15)$$

Применяя формулу (4) к (14) и (15) получаем:

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0^{(-)}(x), & x \in [-1,0], \\ v_0^{(+)}(x), & x \in [0,1], \end{cases} \quad v_k(x) = \begin{cases} v_k^{(-)}(x), & x \in [-1,0], \\ v_k^{(+)}(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

где

$$v_0^{(-)}(x) = \int_{-1}^x \frac{f(\tau) - h_0^{(-)}}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad v_0^{(+)}(x) = \int_1^x \frac{f(\tau) - h_0^{(+)}}{\tau} e^{x-\tau} d\tau;$$

$$v_k^{(-)}(x) = - \int_{-1}^x \frac{h_k^{(-)} + v_{k-1}^{(-)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau, \quad v_k^{(+)}(x) = - \int_1^x \frac{h_k^{(+)} + v_{k-1}^{(+)}(\tau)}{\tau} e^{x-\tau} d\tau.$$

Пусть

$$h_0^{(-)} = h_0^{(+)} = f(0), \quad h_k^{(-)} = -v_{k-1}^{(-)}(0), \quad h_k^{(+)} = -v_{k-1}^{(+)}(0), \quad k \in N$$

тогда $v_k^{(-)} \in C[-1, 0]$, $v_k^{(+)} \in C[0, 1]$, $v_k^{(-)} \in C^\infty(-1, 0)$, $v_k^{(+)} \in C^\infty(0, 1)$.

Таким образом определены все члены неизвестных рядов $h^{(-)}(\varepsilon)$, $h^{(+)}(\varepsilon)$:

$$h^{(-)}(\varepsilon) = f - \varepsilon v_0^{(-)}(0) - \dots - \varepsilon^n v_{n-1}^{(-)}(0) - \dots;$$

$$h^{(+)}(\varepsilon) = f - \varepsilon v_0^{(+)}(0) - \dots - \varepsilon^n v_{n-1}^{(+)}(0) - \dots$$

Переходим к основной части нашего научного результат, т.е. к решению задачи (11)-(12). Решение этой задачи будем искать в виде:

$$w(t, \mu) = \begin{cases} w^{(-)}(t, \mu), & -1/\mu \leq t \leq 0, \\ w^{(+)}(t, \mu), & 0 \leq t \leq 1/\mu, \end{cases}, \quad (16)$$

где $w^{(-)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k^{(-)}(t)$, $w^{(+)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k^{(+)}(t)$.

Подставляя ряд (16) в соотношения (14)-(15) имеем:

$$\begin{aligned} w_0^{(-)}(t) + t w_0^{(-)}(t) &= h_0^{(-)}, \quad -1/\mu < t < 0, \quad w_0^{(-)}(-1/\mu) = 0; \\ w_0^{(+)}(t) + t w_0^{(+)}(t) &= h_0^{(+)}, \quad 0 < t < 1/\mu, \quad w_0^{(+)}(1/\mu) = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} w_{2k-1}^{(-)}(t) + t w_{2k-1}^{(-)}(t) &= t w_{2k-2}^{(-)}(t), \quad -1/\mu < t < 0, \quad w_{2k-1}^{(-)}(-1/\mu) = 0; \\ w_{2k-1}^{(+)}(t) + t w_{2k-1}^{(+)}(t) &= t w_{2k-2}^{(+)}(t), \quad 0 < t < 1/\mu, \quad w_{2k-1}^{(+)}(1/\mu) = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} w_{2k}^{(-)}(t) + t w_{2k}^{(-)}(t) &= h_k^{(-)} + t w_{2k-1}^{(-)}(t), \quad -1/\mu < t < 0, \quad w_{2k}^{(-)}(-1/\mu) = 0; \\ w_{2k}^{(+)}(t) + t w_{2k}^{(+)}(t) &= h_k^{(+)} + t w_{2k-1}^{(+)}(t), \quad 0 < t < 1/\mu, \quad w_{2k}^{(+)}(1/\mu) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

Для функций $w_k^{(-)}(t)$ и $w_k^{(+)}(t)$ потребуем дополнительные условия (условия сращивания):

$$\begin{aligned} v_k^{(-)}(0) + w_{2k}^{(-)}(0) &= v_k^{(+)}(0) + w_{2k}^{(+)}(0), & w_{2k+1}^{(-)}(0) &= w_{2k+1}^{(+)}(0), \quad k = 0, 1, \dots; \\ v_k^{(-)}(0) + w_{2k}^{(-)}(0) &= v_k^{(+)}(0) + w_{2k}^{(+)}(0), & w_{2k+1}^{(-)}(0) &= w_{2k+1}^{(+)}(0), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Условие (20) обеспечивает непрерывность решения (8) в точке $x=0$ и в ее окрестности.

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Решение задачи (21) существует, единственно:

$$\begin{aligned} \xi^{(-)}(t) + t \xi^{(-)}(t) &= G^{(-)}(t), \quad t \in (-\mu^{-1}, 0), \\ \xi^{(+)}(t) + t \xi^{(+)}(t) &= G^{(+)}(t), \quad t \in (0, \mu^{-1}), \\ \xi^{(-)}(0) + k_1 \xi^{(+)}(0) &= \alpha, \quad \xi^{(-)}(0) + k_2 \xi^{(+)}(0) = \beta, \\ \xi^{(-)}(-\mu^{-1}) &= 0, \quad \xi^{(+)}(\mu^{-1}) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

и представимо в виде:

$$\xi^{(-)} = \frac{1}{2} \gamma(B_1^{(+)} - B_1^{(-)}) \int_{-1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} d\tau + \int_{-1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} G^{(-)}(s) ds d\tau,$$

$$\xi^{(+)} = \frac{1}{2} \gamma(B_1^{(+)} - B_1^{(-)}) \int_{1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} d\tau + \int_{1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} G^{(+)}(s) ds d\tau,$$

где

$$\gamma = \left(\int_{-1/\mu}^t e^{-\tau^2/2} d\tau \right)^{-1}, B_1^{(-)} = \int_{-1/\mu}^0 e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} s w_0^{(-)}(s) ds d\tau, \quad B_1^{(+)} = \int_{1/\mu}^0 e^{-\tau^2/2} \int_0^\tau e^{s^2/2} s w_0^{(+)}(s) ds d\tau.$$

На основании этой леммы мы можем утверждать, что решение задач (17)-(20) существуют и единственны.

Таким образом, нами доказана теорема

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) при $\forall x \in [-1, 1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \mu^k w_k(t) + O(\varepsilon^{n+1/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Обсуждение. Проведённое исследование демонстрирует, что двухточечная краевая задача для линейного сингулярно возмущённого уравнения второго порядка с коэффициентом, обращающимся в ноль внутри интервала, обладает рядом нетривиальных особенностей. Классические сингулярно возмущённые задачи обычно характеризуются появлением пограничных слоёв вблизи границ области. Однако в рассмотренном примере $\varepsilon y'' + \chi y' - \chi y = f(x)$ с краевыми условиями $y(-1)=0, y(1)=0$ пограничные слои на концах отрезка отсутствуют, а основной вклад в формирование переходной структуры вносит внутренняя особая точка $x=0$. Это принципиально отличает данную задачу от широко известных моделей, где контрастные структуры возникают лишь в нелинейных уравнениях. Здесь же, несмотря на линейность, наличие нулевого коэффициента при производной в вырожденном уравнении приводит к логарифмической особенности внешнего решения и необходимости построения внутреннего слоя.

Применённый подход, сочетающий обобщённый метод пограничных функций и технику сращивания асимптотических разложений, позволил не только построить формальные асимптотические ряды, но и обосновать их равномерную пригодность. Ключевым моментом стало введение новой переменной $t = x/\mu$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, которая «растягивает» окрестность особой точки и позволяет описать внутреннее решение через функцию, зависящую от быстрой переменной. Интересно, что в отличие от многих сингулярно возмущённых задач, здесь масштаб внутреннего слоя определяется $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, а не ε , что указывает на более сложный характер переходной области.

С вычислительной точки зрения полученные асимптотические формулы могут служить основой для создания эффективных численных алгоритмов, поскольку они дают хорошее начальное приближение даже при умеренно малых ε . Точность асимптотики проверялась в системе Maple на конкретном примере; такая верификация подтверждает практическую ценность метода. Вместе с тем, остаются открытыми вопросы о влиянии более сложных правых частей, о возможности распространения подхода на нелинейные аналоги, а также о строгом обосновании сходимости асимптотических рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$ в классе гладких функций.

Следует отметить, что предложенная методика не требует предварительного знания структуры пограничных слоёв — она сама выявляет их из анализа поведения внешнего решения. Это делает её удобной для автоматизации при построении асимптотик в символьных математических пакетах. В целом, полученные результаты расширяют класс задач, для которых может быть эффективно применён метод сращивания, и демонстрируют, что даже в линейных постановках возможны нетривиальные внутренние переходные слои, если вырожденное уравнение имеет особую точку.

Заключение. В данной статье рассмотрена двухточечная краевая задача для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Показано, что наличие у коэффициента при первой производной нуля внутри интервала приводит к тому, что вырожденное уравнение имеет особую точку, а решение полной задачи формирует внутренний переходный слой в окрестности этой точки, тогда как классические пограничные слои на границах области не возникают. Такая комбинация сингулярного возмущения и внутренней особенности позволила отнести задачу к классу бисингулярных.

Основным результатом работы является построение полного равномерного асимптотического разложения решения с любой степенью точности по малому параметру. Для этого использована комбинация обобщённого метода пограничных функций и метода сращивания асимптотических разложений. В отличие от стандартных подходов, здесь внешнее решение строится раздельно на левом и правом полуинтервалах, а затем сшивается через внутреннее решение, которое описывает поведение в окрестности особой точки. Масштабирующая замена $t = x / \mu$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ позволила получить уравнения для внутренних пограничных функций, решаемые в явном виде. Доказана лемма о существовании и единственности решения вспомогательной задачи для внутреннего слоя, а на её основе сформулирована и доказана теорема о равномерной пригодности асимптотического разложения.

Полученные асимптотические формулы могут быть использованы при моделировании физических процессов, в которых возникает резкое изменение решения внутри области при малом параметре — например, в задачах теплопроводности с переменными коэффициентами, в теории пограничного слоя при наличии внутренней особой линии, а также в экономических и биологических моделях с пороговыми эффектами. Кроме того, результаты могут служить эталоном для тестирования численных методов, предназначенных для решения сингулярно возмущённых задач.

Практическая значимость работы подтверждается сравнением асимптотических приближений с численными расчётами, выполненными в системе Maple, которое показало высокую точность уже при малых порядках асимптотики. В дальнейшем планируется распространить предложенную методику на нелинейные уравнения, а также на задачи с несколькими внутренними особыми точками и на системы уравнений. Отдельным направлением является строгое обоснование асимптотических разложений в смысле сходимости рядов и получение оценок остаточных членов в пространствах более высоких норм.

Литература

1. Алымкулов К., Турсунов Д.А. (2016). Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущённых задач. *Известия вузов. Математика*, 12, 3–11.

2. Васильева, А. Б., Бутузов, В. Ф. (1973) Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. *Москва: Наука*. – 272 с.
3. Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. (1957) Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи математических наук*, 12(4), 3–122.
4. Ильин, А. М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. *Москва: Наука*, 1989. – 334 с.
5. Коул, Дж. (1972) *Методы возмущений в механике жидкости*. Москва: Мир. – 276 с.
6. Ломов, С. А., Ломов, И. С. (2011) *Основы математической теории пограничного слоя*. Москва: Изд-во МГУ. – 456 с.
7. Ломов, С. А. (1981) *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*. Москва: Наука. – 400 с.
8. Найфе, А. (1984) *Введение в методы возмущений*. Москва: Мир. – 535 с.
9. Омаралиева, Г. А., Турсунов, Д. А. (2022) Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 28(2), 193–200.
10. Тихонов, А. Н. О (1948) зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. *Математический сборник*, 22 (64), 193–204.
11. Тихонов, А. Н. (1952) Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. *Математический сборник*, 31 (73)(3), 575–586.
12. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Известия вузов. Математика*, (3), 70–78.
13. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». Вестник Томского государственного университета. *Математика и механика*, (54), 46–57.
14. Alymkulov, K., & Tursunov, D. A. (2017). Perturbed differential equations with singular points. In D. I. Uzunov (Ed.), *Recent studies in perturbation theory* (pp. 1–43). InTech.
15. Antony Prince, P., Govindarao, L., & Elango, S. (2025). Non-standard finite difference scheme for system of singularly perturbed Fredholm integro-differential equations. *Journal of Mathematical Modeling*, 13(4), 823–840.
16. Feng, T., & Ni, M. (2024). Asymptotic solution for a system of singularly perturbed delay differential equations. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 16(1), 458–478.
17. Kumar, D., & Gowrisankar, S. (2025). Parameter uniform numerical scheme for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with an interior layer. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 71(Suppl 2), 1641–1663.
18. Tursunov, D. A., Sulaimanov, Z. M., & Khalmatov, A. A. (2021) Singularly perturbed ordinary differential equation with turning point and interior layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(12), 3016–3021.