

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928.2

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_47

**ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЫРЬЯ МЕЖДУ
ПОТРЕБИТЕЛЯМИ С УЧЕТОМ ДОГОВОРНЫХ УСЛОВИЙ**

Асанкулова Майрамкан, д.ф.-м.н.

may_as@mail.ru

Эшенкулов Паяз, к.ф.-м.н.

pajazbek@mail.ru

Искандарова Гульсунай Самандаровна

iskandarova@gmail.com

Институт математики НАН КР

Аннотация. Исследована задача распределения добываемого сырья между перерабатывающими предприятиями и потребителями с учетом договорных условий. Рассматриваемая задача относится к классу задач математического программирования с линейными целевыми функциями. Приводится, что для данной задачи имеет место условие разрешимости задачи. Приближенным методом в предположении, что имеет место, условие разрешимости задачи получено оптимальное распределение добываемого сырья между предприятиями. Получен максимальный доход перерабатывающими предприятиями при реализации ее после переработки.

Ключевые слова. Сырье, пункт добычи, перерабатывающие предприятия, потребители, целевые функции, распределение, доход, условие разрешимости.

**КЕЛИШИМ ШАРТТАРЫ БАР КЕРЕКТӨӨЧҮЛӨРДҮН
ОРТОСУНДАГЫ ЧИЙКИ ЗАТТЫ БӨЛҮШТҮРҮҮ МАСЕЛЕСИ**

Асанкулова Майрамкан, ф.-м.и.д.

may_as@mail.ru

Эшенкулов Паяз, ф.-м.и.к.

pajazbek@mail.ru

Искандарова Гульсунай Самандаровна

iskandarova@gmail.com

Институт математики НАН КР

Аннотация. Алынган чийки затты кайра иштетуучу ишканалар менен керектөөчүлөрдүн ортосунда бөлүштүрүү маселеси келишимдик шарттарды эске алуу менен изилденип жатат. Каралып жаткан маселе сызыктуу максаттуу функциялар менен математикалык программалоо маселелери классына кирет. Бул маселе үчүн маселенин чечилүү шарты орун алганы көрсөтүлгөн. Болжолдуу ыкманы колдонуу менен маселенин чечилиши шарты орун алган деп эсептеп, казылып алынган чийки затты ишканалардын ортосунда оптималдуу бөлүштүрүлүшү алынат. Эң көп кирешени кайра иштетүү ишканалары кайра иштеткенден кийин сатканда алган.

Урунттуу сөздөр. Чийки зат, казып алуу пункту, кайра иштетүүчү ишканалар, керектөөчүлөр, максаттуу функциялар, бөлүштүрүү, киреше, чечилүү шарты.

**THE PROBLEM OF ALLOCATION OF RAW MATERIALS BETWEEN
CONTRACTUAL CUSTOMERS**

Asankulova Mayramkan, Dr Sc
may_as@mail.ru
Eshenkulov Payaz, ф.-м.у.к.
pajazbek@mail.ru
Iskandarova Gulzyna Samandarovna
iskandarova@gmail.com
Institute mathematic NAS KR
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. The problem of distribution of extracted raw materials between processing enterprises and consumers is studied, taking into account contractual conditions. The problem under consideration belongs to the class of mathematical programming problems with linear objective functions. It is shown that for this problem the condition of solvability of the problem takes place. By an approximate method, assuming that the condition for the solvability of the problem takes place, the optimal distribution of the extracted raw materials between enterprises is obtained. The maximum income was received by processing enterprises when it is sold after processing.

Keywords. Raw materials, extraction point, processing enterprises, consumers, objective functions, distribution, income, solvability condition.

Введение. В недрах Кыргызстана имеются разнообразные виды рудного и нерудного сырья, которые используются в естественном или переработанном состоянии в бытовой сфере и в различных отраслях промышленности. Для цементной промышленности сырьевой базой являются запасы карбонатных и глинистых пород, а запасы высокодекоративных гранитов и гранодиоритов являются сырьевой базой камнеобрабатывающей промышленности. Большое количество месторождений песчано-гравийной смеси, месторождений гипса, месторождений глин и суглинков, месторождения строительного камня являются сырьевой базой для нужды строительной индустрии. Для пищевой и химической промышленности, а также в животноводстве используются месторождения каменной соли и др.

Добыча этих видов сырья и доставка их перерабатывающим предприятиям, а также потребителям при минимальных суммарных затратах имеет важное значение для добывающих компаний и может существенно улучшить работу добывающих компаний..

В работах [1,2] авторами разработаны экономико-математические модели добычи сырья, определения технологического способа добычи сырья в соответствии с затратами.

В этой работе сформулируем экономико-математическую модель задачи определения оптимального объема добычи и перевозки сырья с минимальными затратами и с учетом выполнения договорного условия.

Постановка задачи. Пусть крупная компания региона, состоящая из m пунктов добычи сырья $A_i, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ составил договор о поставке сырья с предприятиями ассоциации $\Pi_k, k=1, 2, \dots, p$. Объем добываемого сырья за планируемый период на каждом пункте добычи предполагается неизвестным x_i^t , но ограниченным сверху величиной $a_i^t, i \in I, t=1, 2, \dots, T$.

В каждом периоде добытое сырье на основе договора должно перевозиться перерабатывающим предприятиям ассоциации $\Pi_k, k=1, 2, \dots, p$ в объеме не более чем $d_k^t, k=1, 2, \dots, p, t=1, 2, \dots, T$, а за весь планируемый период должно быть перевезено в объеме Q_0 .

Также компания за весь планируемый период должен перевезти сырья в объеме b_0 потребителям $G_r, r=1, 2, \dots, R$ этого региона, а в каждом периоде $t, t=1, 2, \dots, T$ -объем сырья не более чем $b_r^t, r=1, 2, \dots, R, t=1, 2, \dots, T$.

Сырье, доставляемое предприятиям ассоциации, перерабатывается в продукцию и реализуется в том же периоде $t, t=1, 2, \dots, T$.

Предполагаются, что затраты на добычу единицы объема сырья и ее транспортировка, на переработку сырья в продукцию и цена реализации единицы объема продукции зависит от периода добычи сырья и его переработки.

Требуется определить объем добычи сырья для пунктов компании

$x_i^t \geq 0, i \in I, t=1,2,\dots,T$, план распределения сырья между предприятиями ассоциации и потребителями региона так, чтобы суммарные затраты на добычу, перевозку сырья были бы минимальными, а для предприятий ассоциации определить объем перерабатываемого сырья, доставляющий максимум дохода при реализации готовой продукции.

Для формулировки математической модели задачи введем следующие обозначения:
 i - индекс пунктов добычи сырья компании, $i \in I$;

I -множество индексов пунктов добычи сырья;

r -индекс потребителей сырья региона, $r=1,2,\dots,R$;

k -индекс перерабатывающих предприятий ассоциации, $k=1,2,\dots,p$;

t -индекс периода добычи сырья компании, где сырье доставляется предприятиям ассоциации и потребителям региона, $t=1,2,\dots,T$.

Известные параметры и функции:

a_i^t – максимальный объем добычи сырья i -го пункта компании в t -ом периоде, $t=1,2,\dots,T, i \in I$;

d_k^t – максимально возможный объем сырья, перевозимый компанией k -му предприятию ассоциации за t -ый период по договору, $k=1,2,\dots,p, t=1,2,\dots,T$; Q_0 – объем сырья, поставляемый компанией предприятиям ассоциации за планируемый период;

b_0 – объем сырья, поставляемый потребителям региона за планируемый период;

b_r^t – максимальный объем сырья, поставляемый компанией r -му потребителю региона за t -ый период, $r=1,2,\dots,R, t=1,2,\dots,T$;

c_i^t – стоимость единицы объема добываемого сырья в i -ом пункте в t -ом периоде, $i \in I, t=1,2,\dots,T$;

C_{ik}^t, C_{ir}^t – транспортные расходы на перевозку единицы объема сырья из i -го пункта добычи в k -ое предприятие ассоциации и r -му потребителю региона в t -ом периоде соответственно, $i \in I, k=1,2,\dots,p, r=1,2,\dots,R, t=1,2,\dots,T$;

c^t – оптовая цена реализации готовой продукции в t -ом периоде, $t=1,2,\dots,T$; λ_k^t – норма расхода сырья на единицу объема готовой продукции в k -ом предприятии ассоциации в t -ом периоде, $k=1,2,\dots,p, t=1,2,\dots,T$;

Искомые переменные:

x_{ik}^t – объем сырья, перевозимый компанией из i -го пункта добычи k -му перерабатывающему предприятию ассоциации в t -ом периоде, $i \in I, k=1,2,\dots,p, t=1,2,\dots,T$;

x_{ir}^t – объем сырья, перевозимый компанией из i -го пункта добычи r -му потребителю региона в t -ом периоде, $i \in I, r=1,2,\dots,R, t=1,2,\dots,T$;

x_i^t – объем сырья, добываемый i -ым пунктом компании в t -ом периоде, $i \in I, t=1,2,\dots,T$;

x_k^t – объем сырья, перерабатываемый k -ым предприятием ассоциации в t -ом периоде, $k=1,2,\dots,p, t=1,2,\dots,T$;

y_k^t – объем готовой продукции k -го предприятия ассоциации в t -ом периоде, $k=1,2,\dots,p, t=1,2,\dots,T$.

Заметим, что поставленная проблема может быть найдена из решения следующих двух последовательно решаемых задач.

В соответствии с принятыми обозначениями математическая модель определения оптимального объема добычи сырья компанией и ее распределение между потребителями по критерию минимума суммарных затрат на добычу сырья и перевозку запишется в виде.

Найти минимум

$$L(x) = \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^T \left\{ \left(\sum_{k=1}^p c_{ik}^t x_{ik}^t + \sum_{r=1}^R c_{ir}^t x_{ir}^t \right) + c_i^t x_i^t \right\} \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{r=1}^R x_{ir}^t + \sum_{k=1}^p x_{ik}^t = x_i^t, \quad i \in I, t=1, 2, \dots, T, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ik}^t \leq d_k^t, \quad k=1, 2, \dots, p, t=1, 2, \dots, T, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^T x_{ik}^t = Q_0, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ir}^t \leq b_r^t, \quad r=1, 2, \dots, R, t=1, 2, \dots, T, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T x_{ir}^t = b_0, \quad (6)$$

$$0 \leq x_i^t \leq a_i^t, \quad i \in I, t=1, 2, \dots, T, \quad (7)$$

$$x_{ik}^t \geq 0, \quad x_{ir}^t \geq 0, \quad i \in I, k=1, 2, \dots, p, r=1, 2, \dots, R, t=1, 2, \dots, T, \quad (8)$$

где $x = \left\| \left| x_{ik}^t \right|_{|I|, p}, \left| x_{ir}^t \right|_{|I|, R}, t=1, 2, \dots, T \right\|$.

Предполагается, что имеет место условие

$$b_0 + Q_0 \leq \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I} a_i^t, \quad Q_0 \leq \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^p d_k^t, \quad b_0 \leq \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R b_r^t. \quad (9)$$

Согласно принятым обозначениям математическая модель задачи определения оптимального объема готовой продукции предприятиями ассоциации, доставляющий максимум дохода могут быть записана в виде.

Найти максимум

$$L(y) = \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^p c^t y_k^t \quad (10)$$

при условиях

$$\lambda_k^t y_k^t = x_k^t, \quad k=1, 2, \dots, p, t=1, 2, \dots, T, \quad (11)$$

$$y_k^t \geq 0, \quad k=1, 2, \dots, p, t=1, 2, \dots, T, \quad (12)$$

где $x_k^t = \sum_{i \in I} x_{ik}^t, \quad k=1, 2, \dots, p, t=1, 2, \dots, T$.

Из постановки задачи легко заметить, что задача (1)-(8) и (10)-(12) может быть решена последовательно.

Решение задачи. Методом, приведенным в [3] определяем оптимальный объем сырья перевозимого от каждого пункта добычи в каждое предприятие ассоциации и каждому потребителю и объемы добычи сырья каждого пункта в t-ом периоде, $t=1, 2, \dots, T$.

Далее, используя решения задачи (1)-(8), т.е. $x_{ik}^t, \quad i \in I, k=1, 2, \dots, p, t=1, 2, \dots, T$, где

$x_k^t = \sum_{i \in I} x_{ik}^t, k=1,2, \dots, p, t=1,2, \dots, T$, решаем задачу (10)-(12).

Решив задачу (10)-(12), получим оптимальный план $\bar{y}_k^t \geq 0, k=1,2, \dots, p, t=1,2, \dots, T$ выпуска готовой продукции каждого предприятия ассоциации на каждом периоде, доставляющий максимальный доход при реализации готовой продукции.

Для демонстрации метода и алгоритма решения задачи сформулируем и решим числовой пример.

Пример. Пусть крупная компания региона, состоящая из двух пунктов добычи сырья $A_i, i=\{1,2\}$ составил договор о поставке сырья с тремя предприятиями ассоциации $\Pi_k, k=1,2,3$. Объем добываемого сырья за планируемый период на каждом пункте добычи предполагается неизвестным x_i^t , но ограниченным сверху величиной $a_i^t, i=1,2, t=1,2$, т.е.

$$|a_i^t|_{2,2} = \begin{pmatrix} 23000 & 15000 \\ 20000 & 15000 \end{pmatrix}.$$

На основе договора, за весь планиваемый период сырье должно доставляться ассоциации в объеме $Q_0=50000$, в том числе каждому перерабатывающему предприятию $\Pi_k, k=1,2,3$ ассоциации за период $t, t=1,2$ - в объеме не более чем $|d_k^t|, k=1,2,3, t=1,2$, т.е.

$$|d_k^t|_{3,2} = \begin{pmatrix} 11000 & 9000 \\ 9000 & 10000 \\ 7000 & 8000 \end{pmatrix}.$$

А также компания за весь планиваемый период должен доставлять сырье в объеме $b_0=10000$ потребителям $G_r, r=1,2$ этого региона, а в каждом периоде $t, t=1,2$, - объем сырья не более чем $b_r^t, r=1,2, t=1,2$, т.е.

$$|b_r^t|_{2,2} = \begin{pmatrix} 5000 & 4000 \\ 4000 & 3000 \end{pmatrix}.$$

Сырье, доставляемое предприятиям ассоциации, перерабатывается в продукцию и реализуется в том же периоде $t, t=1,2, \dots, T$.

Известны затраты на единицу объема добываемого сырья в i -ом пункте в t -ом периоде, $i=1,2, t=1,2$, т.е. $|c_i^t|_{2,2} = \begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 150 & 150 \end{pmatrix}$. Также известны затраты на транспортировку единицы объема сырья от каждого пункта добычи до перерабатывающих предприятий и до потребителей региона, т.е.

$$|c_{ik}^{t=1}|_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, |c_{ik}^{t=2}|_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, |c_{ir}^{t=1}|_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, |c_{ir}^{t=2}|_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ и}$$

цена реализации единицы объема продукции зависит от периода добычи сырья и его переработки в перерабатывающих предприятиях $c_k^t, k=1,2,3$,

$$t=1,2, \text{ т.е. } |c_k^t|_{3,2} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 10 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить объем добычи сырья для пунктов компании

$x_i^t \geq 0, i=1,2, t=1,2$, план распределения сырья между предприятиями ассоциации и потребителями региона так, чтобы суммарные затраты на добычу, перевозку сырья были

бы минимальными, а для предприятий ассоциации определить объем перерабатываемого сырья, доставляющий максимум дохода при реализации готовой продукции.

На основе выше приведенных данных сформулируем числовую модель задачи.

Найти минимум

$$L(x)=2x_{11}^1+3x_{12}^1+2x_{13}^1+3x_{21}^1+2x_{22}^1+3x_{23}^1+2x_{11}^2+3x_{12}^2+2x_{13}^2+3x_{21}^2+2x_{22}^2+3x_{23}^2+ \\ +x_{11}^1+2x_{12}^1+2x_{21}^1+2x_{22}^1+x_{11}^2+2x_{12}^2+2x_{21}^2+2x_{22}^2+100x_1^1+150x_1^2+120x_2^1+130x_2^2 \quad (13)$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_{11}^1+x_{12}^1+x_{13}^1+x_{21}^1+x_{22}^1 &=x_1^1, \\ x_{21}^1+x_{22}^1+x_{23}^1+x_{21}^2+x_{22}^2 &=x_2^1, \\ x_{11}^2+x_{12}^2+x_{13}^2+x_{21}^2+x_{22}^2 &=x_2^2, \\ x_{21}^2+x_{22}^2+x_{23}^2+x_{21}^1+x_{22}^1 &=x_2^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$0 \leq x_1^1 \leq 21000, \quad 0 \leq x_2^1 \leq 20000, \quad 0 \leq x_1^2 \leq 15000, \quad 0 \leq x_2^2 \leq 15000, \quad (15)$$

$$x_{11}^1+x_{21}^1 \leq 8000, \quad x_{12}^1+x_{22}^1 \leq 6000, \quad x_{13}^1+x_{23}^1 \leq 7000, \quad x_{11}^2+x_{21}^2 \leq 9000,$$

$$x_{12}^2+x_{22}^2 \leq 8000, \quad x_{13}^2+x_{23}^2 \leq 6000, \quad (16)$$

$$x_{11}^1+x_{12}^1+x_{13}^1+x_{21}^1+x_{22}^1+x_{23}^1+x_{11}^2+x_{12}^2+x_{13}^2+x_{21}^2+x_{22}^2+x_{23}^2=50000, \quad (17)$$

$$x_{11}^1+x_{21}^1 \leq 5000, \quad x_{12}^1+x_{22}^1 \leq 4000, \quad x_{11}^2+x_{21}^2 \leq 4000, \quad x_{12}^2+x_{22}^2 \leq 3000, \quad (18)$$

$$x_{11}^1+x_{21}^1+x_{21}^2+x_{22}^2+x_{11}^2+x_{21}^2+x_{21}^1+x_{22}^1=6000, \quad (19)$$

$$x_{ik}^t \geq 0, \quad i=1,2, \quad k=1,2,3, \quad t=1,2. \quad (20)$$

Задачу решим способом, изложенным в [3]. Получен оптимальный план добычи сырья в пунктах добычи компании, т.е.

$$X=\{x_{12}^1=9000; x_{13}^1=7000; x_{21}^1=11000; x_{11}^2=1000; x_{12}^2=10000; x_{13}^2=4000;$$

$$x_{21}^2=8000\}, \text{ при этом целевая функция приняла значение } L(x)=7333000.$$

Далее используем решение задачи (13)-(19), т.е. x_{ik}^t , $i=1,2$, $k=1,2,3$, $t=1,2$, сформулируем задачу вида (10)-(12). Так как известна и оптовая цена реализации единицы объема готовой продукции в t -ом периоде c^t , $t=1,2$, т.е. $c^t=(c^1, c^2)=(10, 12)$ и норма расхода сырья на единицу объема готовой продукции в k -ом предприятии ассоциации в t -ом периоде λ_k^t , $k=1,2,3$, $t=1,2$, т.е.

$$|\lambda_k^t|_{3,2} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Используя приведенные данные, сформулируем числовую модель.

Найти максимум

$$L(y)=10y_1^1+10y_2^1+10y_3^1+12y_1^2+12y_2^2+12y_3^2+12y_1^2 \quad (21)$$

при условиях

$$12y_1^1=11000, \quad 10y_2^1=9000, \quad 11y_3^1=7000, \quad 8y_1^2=1000, \quad 10y_2^2=10000, \quad 12y_3^2=4000,$$

$$8y_1^2=8000, \quad (22)$$

$$y_k^t \geq 0, k=1,2, t=1,2. \quad (23)$$

Решив задачу (21)-(23) получим оптимальный план y_k^t , $k=1,2,3$, $t= 1,2$, выпуска готовой продукции каждого предприятия ассоциации в каждом периоде, т. е. $Y=\{ y_1^1=916,7; y_2^1=900,0; y_3^1= 636, 4, y_1^2=125,0; y_2^2=1000,0; y_3^2=333,3; y_4^2=1000,0\}$, и суммарный доход при договорных условиях работы $L(y) = 54030,3$ усл. ед.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанкулова М. Оптимизация добычи и распределения сырья между потребителями в зависимости от периода [Текст] / М. Асанкулова, А. Жусупбаев // Проблемы современной науки и образования. – Иваново, 2016, № 4(46). – С.7-12.
2. Жусупбаев А. Задача определения технологического способа добычи, переработки и транспортировки угля [Текст] / А. Жусупбаев, М. Асанкулова, Султанкул кызы Айнура // Наука, техника и образование. – Иваново, 2016, № 7(25). – С.10-14.
3. Жусупбаев А. Задача оптимизации производства напитков компании и распределения их между потребителями [Текст] / А. Жусупбаев, Ж. Барганлиева, М. Асанкулова // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек: – 2017, №5, часть 1. – С.61-63.