ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА. 2023, №1

УДК 517.928.2
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_24

КОНЕЧНАЯ СКОРОСТЬ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В КРОСС ДИФФУЗИОННЫХ СИСТЕМАХ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Арипов Мирсаид Мирсиддиқович, д.ф.-м.н., профессор,
mirsaidaripov@mail.ru
Хожимуродова Мадина Бахромовна,PhD,
madinakhojimurodova@gmail.com
Национальный университет Узбекистана,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Исследована задача Коши для кросс диффузионной параболической системы уравнений не дивергентного вида с переменной плотностью и поглощением, зависящим от времени. В работе путем построения решение типа Зельдовича-Баренблатта для системы установлены нелинейные эффекты конечной скорости и пространственной локализации распространение тепла. Используются метод регуляризации и методика верхнего-нижнего решения, чтобы показать локальное существование решения для нелинейного вырождающегося параболического системы. Обсуждается существование глобального решения, установлены blow-up свойство решения. Доказано локальное существование и единственность классического решения.*

Ключевые слова: *Задача Коши, кросс-диффузия, переменной плотность, конечной скорость, поглощение, локальное существование, глобальное решение, blow-up свойство*

FINITE VELOCITY AND SPACE LOCALIZATION IN NON- DIVERGENT CROSS-DIFFUSION SYSTEMS WITH VARIABLE DENSITY

Aripov Mirsaid Mirsiddikovich, Dr Sc, professor,
mirsaidaripov@mail.ru
Khojimurodova Madina Bakhromovna, PhD,
madinakhojimurodova@gmail.com
National University of Uzbekistan
Tashkent, Uzbekistan

Abstract*. The Cauchy problem for a cross-diffusion parabolic system of non-divergent equations with variable density and time-dependent absorption is investigated.*

In this paper, by constructing a solution of the Zeldovich-Barenblatt type for the system, nonlinear effects of finite velocity and space localization of heat conductivity are established. The regularization method and the upper-lower solution technique are used to show the local existence of a solution for a nonlinear degenerate parabolic system. The existence of a global solution is discussed, the blow-up property of the solution is established. The local existence and uniqueness of the classical solution is proved.

Key words: *Cauchy problem, cross-diffusion, variable density, finite velocity, absorption, local existence, global solution, blow-up property.*

Рассмотрим в области $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ следующую задачу Коши для кросс диффузионной параболической системы уравнений не дивергентного вида с переменной плотностью и поглощением, зависящим от времени

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^n v^{m_1-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right)-\gamma_1(t)\,u,\ \frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^n u^{m_2-1}\left|\nabla v^k\right|^{p-2}\nabla v\right)-\gamma_2(t)\,v,\quad (1)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\geq 0,\ \ v|_{t=0}=v_0(x)\geq 0,\ \ \forall x\in R^N \quad (2)$$

где $m_i - 1,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, k \ge 1, p \ge 2, 0 < \gamma_i(t) \in C(0, \infty), n \ge p$ - положительные вещественные числа, $n \ne -2,\ u = u(t,x) \ge 0,\ v = v(t,x) \ge 0$ - искомые решения.

Нелинейные уравнения и системы уравнений в не дивергентной форме часто используются для описания различных физических явлений, таких, как процесс диффузии для биологических видов, резистивный диффузионных явлений в бес силовых магнитных полей, кривая потока укорочения, распространение инфекционных заболеваний и так далее, см. [1] - [6].

В работе [1] изучается нелинейные вырождающиеся параболическая система $u_t = v^{\gamma_1}(u_{xx} + au),\ v_t = u^{\gamma_2}(v_{xx} + bv)$ с граничными условиями Дирихле. Используются метод регуляризации и методика верхнего-нижнего решения, чтобы показать локальное существование решения для нелинейного вырождающегося параболического системы. Обсуждается существование глобального решения, установлены blow-up свойство решения.

Исследовано положительные решения вырожденных квазилинейных параболических систем не дивергентной форме

$$u_{it} = f_i(u_{i+1})(\Delta u_i + a_i u_i),\ x \in \Omega,\ t > 0,\ i = 1, 2, ..., n-1,$$
$$u_{nt} = f_n(u_1)(\Delta u_n + a_n u_n),\ x \in \Omega,\ t > 0$$

с однородной граничным условием Дирихле и положительным начальным условием в работе [2]. Доказано локальное существование и единственность классического решения. Показано, что когда $\min\{a_1, ..., a_n\} \le \lambda_1$ (где λ_1 является первое собственное значение $-\Delta$ в Ω с однородным граничным условием Дирихле), то существует глобальное положительное классическое решение и все он не имеют свойство blow-up.

В работе [3] исследовано асимптотическое поведение автомодельных решений параболической системы не дивергентного вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\gamma_i} \nabla\left(\left|\nabla u_i\right|^{p-2} \nabla u_i\right) - u_{3-i}^{q_i} \quad (i = 1, 2)$$

Построены асимптотические представления автомодельных решений нелинейных в зависимости от значения входящих в систему числовых параметров, найдены необходимые и достаточные признаки их существования.

Свойства конечной скорости распространения возмущения (КСРВ) и асимптотика автомодельных решений для дивергентных систем рассмотрены в работах [3-6]. В настоящей работе путем построения решение типа Зельдовича-Баренблатта для системы (1) установлены нелинейные эффекты конечной скорости и пространственной локализации распространение тепла. Получены функции $\gamma_i(t), i = 1, 2$ при котором происходит пространственная локализация распространение возмущения. Ниже построена автомодельная система, найдено её точное решение, проведён качественный анализ решение автомодельной системы. Автомодельная система относительно $f(\xi), \psi(\xi)$ для (1) строится следующим образом оценки обобщённого решения и фронта для задачи (1),(2). Найдены условия на числовые параметры системы характеризующие нелинейную среду и

$$u(t,x) = \bar{u}(t) w(\tau, \varphi|x|),\ v(t,x) = \bar{v}(t) \psi(\tau, \varphi|x|) \qquad (3)$$

Тогда система (1) превращается в систему

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}=\psi^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^n\psi^{m_1-1}\left|\nabla w^k\right|^{p-2}\nabla w\right),\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau}=w^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^n w^{m_2-1}\left|\nabla \psi^k\right|^{p-2}\nabla v\right),$$
$$\tau(\mathrm{t})=\int_0^t \bar{w}(\mathrm{y})]^{\alpha_1+k(\mathrm{p}-2)+m_1-1}dy=\int_0^t[\bar{v}(\mathrm{y})]^{\alpha_2+k(\mathrm{p}-2)+m_2-1}dy \tag{4}$$
$$\bar{\mathrm{w}}(\mathrm{t})=\exp(-\int_0^t\gamma_1(\mathrm{y})d\mathrm{y}),\quad \bar{\psi}(\mathrm{t})=\exp(-\int_0^t\gamma_2(\mathrm{y})d\mathrm{y}),$$

Используя алгоритм нелинейного расщепления [4] полагая

$$\mathrm{w}(\tau,\mathrm{x})=(\mathrm{T}+\tau)^{-\alpha_1}\mathrm{z}\left(\tau_1(\tau),\varphi|\mathrm{x}|\right),\ \mathrm{v}(\tau,\mathrm{x})=(\mathrm{T}+\tau)^{-\alpha_2}\theta\left(\tau_1(\tau),\varphi|\mathrm{x}|\right),$$
$$\mathrm{z}\left(\tau_1,\varphi|\mathrm{x}|\right)=\mathrm{f}_1(\xi),\theta\left(\tau_1,\varphi|\mathrm{x}|\right)=\psi_1(\xi),\xi=\varphi(|\mathrm{x}|)\tau_1^{-1/\mathrm{p}},$$
$$\tau_1(\mathrm{t})=\frac{(\mathrm{T}+\tau)^{1-\alpha_1\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\mathrm{n}_1-1)}}{1-\alpha_1\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\mathrm{n}_1-1)},\ 1-\alpha_1\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\mathrm{n}_1-1\neq 0,\mathrm{T}\geq 0$$

Система (4) при выполнение условия $\mathrm{n}_2\mathrm{m}_1-\alpha_1\mathrm{m}_1+\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)=\alpha_2\mathrm{m}_1-\alpha_1\mathrm{m}_1+\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)$, превращается в автомодельную систему уравнений

$$\mathrm{f}_2^{\mathrm{n}_1}\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\mathrm{f}_2^{\mathrm{m}_1-1}\left|\frac{d\mathrm{f}_1^{\mathrm{k}}}{d\xi}\right|^{\mathrm{p}-2}\frac{d\mathrm{f}_1}{d\xi}\right)+\frac{1}{\mathrm{p}}\xi\frac{d\mathrm{f}_1}{d\xi}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2\mathrm{m}_1+\alpha_1\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{n}_1-1}\mathrm{f}_1=0,$$
$$\mathrm{f}_1^{\mathrm{n}_2}\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\mathrm{f}_1^{\mathrm{m}_2-1}\left|\frac{d\mathrm{f}_2^{\mathrm{k}}}{d\xi}\right|^{\mathrm{p}-2}\frac{d\mathrm{f}_2}{d\xi}\right)+\frac{1}{\mathrm{p}}\xi\frac{d\mathrm{f}_2}{d\xi}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1\mathrm{m}_2+\alpha_2(\mathrm{p}-2)+\mathrm{n}_2-1}\mathrm{f}_2=0,$$

где где $\xi-$ автомодельная переменная, $s=\mathrm{pN}/(\mathrm{p}-\mathrm{n}),\mathrm{n}<\mathrm{p}$,

Введем функции

$$\mathrm{u}_+(\mathrm{t},\mathrm{x})=\bar{\mathrm{u}}(\mathrm{t})(\mathrm{T}+\tau)^{-\alpha_3}\left(\mathrm{a}-\xi^{\mathrm{p}/(\mathrm{p}-1)}\right)_+^{\mathrm{p}_1},\ \mathrm{v}_+(\mathrm{t},\mathrm{x})=\bar{\mathrm{v}}(\mathrm{t})(\mathrm{T}+\tau)^{-\alpha_4}\left(\mathrm{a}-\xi^{\mathrm{p}/(\mathrm{p}-1)}\right)_+^{\mathrm{p}_i},\mathrm{a}>0$$
$$\mathrm{p}_i=\frac{\mathrm{p}-1}{\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\alpha_1-1},\mathrm{i}=1,2,\xi=\varphi(|\mathrm{x}|)\tau_1^{-1/\mathrm{p}},\varphi(|\mathrm{x}|)=[(\mathrm{p}-\mathrm{n})/\mathrm{p}]|\mathrm{x}|^{\mathrm{p}/(\mathrm{p}-\mathrm{n})},\mathrm{p}-\mathrm{n}\neq 0$$
$$\tau_1(\mathrm{t})=\frac{(\mathrm{T}+\tau)^{1-\alpha_3(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\alpha_1-1)}}{1-\alpha_3(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\alpha_1-1)},1-\alpha_3(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_1+\alpha_1-1)$$

В работе в частности доказана следующая теорема

Теорема. Пусть выполнены условия

$$\alpha_i+\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{m}_i-1>0,\ \mathrm{i}=1,2,\ \tau_1(\infty)<\infty,\ \mathrm{p}>\mathrm{n}$$
$$\mathrm{u}_0(\mathrm{x})\leq\mathrm{u}_+(0,\mathrm{x}),\mathrm{x}\in R^N$$

Тогда для решения задачи (1), (2) имеет место оценка

$$\mathrm{u}(\mathrm{t},\mathrm{x})\leq\mathrm{u}_+(\mathrm{t},\mathrm{x}),\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{x})\leq\mathrm{v}_+(\mathrm{t},\mathrm{x})\text{ в Q}$$

а для фронта (свободной границы) справедлива оценка $|\mathrm{x}|\ \leq[\mathrm{p}/(\mathrm{p}-\mathrm{n})]\mathrm{a}^{(\mathrm{p}-1)/\mathrm{p}}(\tau_1(\mathrm{t}))^{1/(\mathrm{p}-\mathrm{n})}$ и решение задачи (1), (2) пространственно локализовано.

Замечание. Из оценки решения, полученной в теореме вытекает, что поскольку $\mathrm{u}(\mathrm{t},\mathrm{x})\leq\mathrm{u}_+(\mathrm{t},\mathrm{x}),\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{x})\leq\mathrm{v}_+(\mathrm{t},\mathrm{x})$ в Q, то решение задачи (1), (2) обладает свойством

$$\mathrm{u}(\mathrm{t},\mathrm{x})\equiv 0,\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{x})\equiv 0\text{ при}|\mathrm{x}|\ \geq[\mathrm{p}/(\mathrm{p}-\mathrm{n})]\mathrm{a}^{(\mathrm{p}-1)/\mathrm{p}}(\tau_1(\mathrm{t}))^{1/(\mathrm{p}-\mathrm{n})}\text{ и }\tau_1(\mathrm{t})>0,\ \forall\mathrm{t}>0$$

что означает конечную скорость распространения возмущений [1-3].

Основной сложностью при численном решение рассмотренной задачи является не единственности решения задачи (1) -(2). Поэтому весьма важно при численных расчетах выбор подходящих начальных приближений в зависимости от значения числовых параметров системы. Так как мы располагаем оценкой решения, её можно использовать в сочетание с принципом сравнение решения для проведения вычислительного эксперимента для достаточно широкого класса данных, используя найденное решение в качестве начального приближения. Также можно анализировать оценку погрешности численного расчета сопоставляя её с точными данными.

Литература

1. Samarskii, A.A. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin [Text] / A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov // 4(1995), Walter de Grueter, 535. http://dx.doi.org/10.1515/9783110889864
2. Zhi-wen Duan, Li Zhou. Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems with Crosswise-Diffusion [Text] / Zhi-wen Duan, Li Zhou. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 244(2000). – P. 263--278.
3. Арипов, М. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида. Вестник КазНУ [Text] / M. Арипов, А.С. Матякубов //, №3(86), 2015, с. 275-282.
4. Aripov, M. Method of the Standard Equation for the Solution of the Nonlinear Value Problem [Text] / M. Aripov // Fan, Tashkent, 1988, 137 p.
5. Aripov, M. Computer modeling of nonlinear processes of diffusion [Text] / M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva // Tashkent, “University” 2020, 687 pp.
6. Aripov, M., An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system [Text] / M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva // J. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2015, 6 (6), p. 1-10. (ISSN 1997-1397)