МАТЕМАТИКА

УДК 512.554.1
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_33

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И АВТОМОРФИЗМОВ НА АЛГЕБРАХ ИСАЕВА-КИСЛИЦИНА

Арзикулов Фарходжон Нематжонович, д.ф.-м. н., доцент,
arzikulovfn@gmail.com
В.И. Институт математики имени Романовского Академии наук Узбекистана, Алмазарский район, улица Университетская 9. Ташкент, Узбекистан,
АГУ, улица Университетская 9, Андижан, Узбекистан
Уринбоев Фуркат Садикджанович, аспирант НамГУ,
furqatjonforever@gmail.com
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан
Абдумуминов Мурод, Магистр в НамГУ
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан

Аннотация: *В настоящей работе изучаются простые алгебры, не принадлежащие к известным классам алгебр (ассоциативным алгебрам, альтернативным алгебрам, алгебрам Ли, йордановым алгебрам и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры над полем характеристики 0 без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным. В настоящей работе мы рассматриваем такую алгебру – простую семимерную алгебру $\mathcal{B}$. Мы доказываем, что каждое локальное дифференцирование алгебры $\mathcal{B}$ является дифференцированием и каждое 2-локальное дифференцирование алгебры $\mathcal{B}$ также является дифференцированием. А также доказываем, что каждый локальный автоморфизм алгебры $\mathcal{B}$ является автоморфизмом и каждый 2-локальный автоморфизм алгебры $\mathcal{B}$ также является автоморфизмом.*

Ключевые слова: *простая алгебра, дифференцирование, локальное дифференцирование, 2-локальное дифференцирование, автоморфизм, локальный автоморфизм, 2-локальный автоморфизм, базис тождеств.*

A CHARACTERIZATION OF DERIVATIONS ON ISAYEV-KISLITSIN ALGEBRAS

Farhodjon Arzikulov Nematjonovich, D.Sc., Associate Professor,
arzikulovfn@gmail.com
Institute of Mathematics named after Romanovsky Academy Sciences of Uzbekistan, Olmazor district, University street 9, Tashkent, Uzbekistan,
ASU, University street 129, Andijan, Uzbekistan
Furkat Urinboev Sadikdzhanovich, postgraduate student of NamSU,
furqatjonforever@gmail.com
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan
Murod Abdumuminov, Master at NamSU
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan

Abstract:: *In the present paper we study simple algebras, which do not belong to the well-known classes of algebras (associative algebras, alternative algebras, Lie algebras, Jordan algebras, etc.). The simple finite-dimensional algebras over a field of characteristic 0 without finite basis of identities, constructed by Isayev and Kislitsin, are such algebras. In the present paper we consider such algebras: the simple seven-dimensional algebra $\mathcal{B}$. We prove that every local derivation of the algebra $\mathcal{B}$ is a derivation, and every 2-local derivation of the algebra $\mathcal{B}$ is also a derivation. We also prove that every local automorphism of the algebra $\mathcal{B}$ is an automorphism, and every 2-local automorphism of the algebra $\mathcal{B}$ is also an automorphism.*
Keywords: *Simple algebra, Derivation, Local derivation, 2-Local derivation, Automorphism, Local automorphism, 2-Local automorphism, Basis of identities.*

1. Введение. В настоящей работе изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования простых конечномерных алгебр без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным в [3].

Понятие локальных дифференцирований было введено и исследовано Кадисоном в [2]. Кадисон доказал, что всякое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана в двойственный банахов бимодуль является дифференцированием. Аналогичное понятие 2-локальных производных было введено Шёмрлем. Шёмрл доказал, что любое 2-локальное дифференцирование алгебры $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H является дифференцированием [7]. Впоследствии появилось множество новых результатов, связанных с описанием локальных и 2-локальных дифференцирований различных алгебр.

В настоящей статье мы продолжаем изучение дифференцирований и автоморфизмов простых алгебр. В данной работе изучены дифференцирования и автоморфизмы простых алгебр, не принадлежащих известным классам алгебр (коммутативным, ассоциативным, альтернативным, лиевым, жордановым и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным в работе [3]. А именно, мы доказываем, что любое локальное дифференцирование простой конечномерной алгебры без конечного базиса тождеств, построенное Исаевым и Кислициным в [3], является дифференцированием, а всякое 2-локальное дифференцирование этой алгебры также является дифференцированием. Мы также доказываем, что любой локальный автоморфизм простой конечномерной алгебры без конечного базиса тождеств, построенной Исаевым и Кислициным в [3], является автоморфизмом, а всякий 2-локальный автоморфизм этой алгебры также является автоморфизмом. В работе [1] изучены локальные и 2-локальные дифференцирования и автоморфизмы других таких алгебр, построенных Кислициным в [5], [6]. Отметим, что центральные простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств, рассматривались также в работе [4] Исаева и Кислицина.

2. Простая конечномерная алгебра без конечного базиса тождеств. Пусть $\mathcal{B} = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_{\mathbb{F}}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0, ненулевые произведения базисных элементов из

$$\{1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\} \quad (1)$$

определяются правилами $v_1 e_{11} = v_1, v_1 e_{12} = v_2, v_2 e_{22} = v_2, v_2 p = 1.$ Тогда $\mathcal{B}$ – простая алгебра без конечного базиса тождеств [3]. Пусть a – элемент из $\mathcal{B}$. Тогда мы можем написать $a = a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$ для некоторых элементов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ в $\mathbb{F}$. На протяжении всей статьи пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. И наоборот, если $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ – векторстолбец с a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 в $\mathbb{F}$, то на протяжении всей статьи через $\hat{v}$ будем обозначать элемент $a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$ то есть, $\hat{v} = a_1 1 + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p.$

Пусть $\mathcal{A}$– алгебра. Линейное отображение $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для любых двух элементов $x, y \in \mathcal{A}$. Нашим основным инструментом для описания локальных и 2-локальных дифференцирований $\mathcal{B}$ является следующее предложение.

Предложение 1. *Линейное отображение $D: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ является дифференцированием тогда и только тогда, когда матрица D в стандартном базисе (1) имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{2,2} + a_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Здесь действие D соответствует умножению матрицы на правый столбец.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой свойства дифференцирования на алгебре $\mathcal{B}$. □

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется локальным дифференцированием, если для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ существует дифференцирование $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $\nabla(x) = D(x)$.

Теорема 2. Каждое локальное дифференцирование на простой алгебре $\mathcal{B}$ является дифференцированием.

Доказательство. Пусть ∇ – локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ – матрица ∇. Тогда $\nabla(v_1) = a_{2,2}^{v_1} v_1 = a_{2,2} v_1, \nabla(v_2) = (a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2}) v_2 = a_{3,3} v_2,$

$\nabla(e_{1,2}) = a_{5,5}^{e_{12}} e_{1,2} = a_{5,5} e_{12}, \nabla(p) = -(a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p}) p = a_{7,7} p$ а остальные компоненты матрицы A равны нулю. В то же время,

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{12} + p) = \nabla(v_1) + \nabla(v_2) + \nabla(e_{12}) + \nabla(p), \qquad (2)$$

и $\nabla(v_1 + v_2 + e_{12} + p) = a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_1 + (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}) v_2 + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} e_{12} - (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}) p.$ В силу (2), имеем

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_1 + (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}) v_2 +$$
$$+a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} e_{12} - (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}) p$$
$$= a_{2,2}^{v_1} v_1 + (a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2}) v_2 + a_{5,5}^{e_{12}} e_{12} - (a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p}) p.$$

Отсюда, $a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2} = a_{2,2}^{v_1} + a_{5,5}^{e_{12}}, a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p} = a_{2,2}^{v_1} + a_{5,5}^{e_{12}}$. Поэтому, в силу предложения 1, ∇ является дифференцированием. Доказательство завершено. □

В следующей теореме мы даем еще одну характеристику дифференцирований на алгебре $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Отображение (не обязательно линейное) $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется 2-локальным дифференцированием, если для любых элементов $x,\ y \in \mathcal{A}$ существует дифференцирование $D_{x,y}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $\Delta(x) = D_{x,y}(x),\ \Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

Теорема 3. *Каждое 2-локальное дифференцирование на простой алгебре* $\mathcal{B}$ *является дифференцированием.*

Доказательство. Пусть Δ – 2-локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть для элементов $a,\ b \in \mathcal{B}$ $D_{a,b}$ – дифференцирование на $\mathcal{B}$ такое, что $D_{a,b}(a) = \Delta(a)$, $D_{a,b}(b) = \Delta(b)$, и, пусть $A_{a,b} = (a_{i,j}^{a,b})_{i,j=1}^{7}$ – матрица дифференцирования $D_{a,b}$. Пусь $a = \lambda_1 1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11} + \lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \lambda_7 p$ – произвольный элемент из $\mathcal{B}$. Для каждого $v \in \mathcal{B}$ существует дифференцирование $D_{v,a}$ такое, что $\Delta(v) = D_{v,a}(v),\ \ \Delta(a) = D_{v,a}(a)$. Тогда из $D_{v_1,v}(v_1) = D_{v_1,a}(v_1),\ v \in \mathcal{B}$ следует что $a_{2,2}^{v_1,v} v_1 = a_{2,2}^{v_1,a} v_1$. Отсюда, $a_{2,2}^{v_1,v} = a_{2,2}^{v_1,a}$. Поэтому, $\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1 + \big(a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a}\big)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_1,a}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a})\lambda_7 p$. Аналогично, из $D_{v_2,v}(v_2) = D_{v_2,a}(v_2),\ v \in \mathcal{D}$ следует что $\Delta(a) = D_{v_2,a}(a) = a_{2,2}^{v_2,a}\lambda_2 v_1 + \big(a_{2,2}^{v_2,v} + a_{5,5}^{v_2,v}\big)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_2,a}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{v_2,a} + a_{5,5}^{v_2,a})\lambda_7 p$. Точно также мы имеем $\Delta(a) = D_{e_{12},a}(a) = a_{2,2}^{e_{12},a}\lambda_2 v_1 + \big(a_{2,2}^{e_{12},a} + a_{5,5}^{e_{12},a}\big)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{12},v}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{e_{12},a} + a_{5,5}^{e_{12},a})\lambda_7 p, \Delta(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{p,a}\lambda_2 v_1 + \big(a_{2,2}^{p,a} + a_{5,5}^{p,a}\big)\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{p,a}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{p,v} + a_{5,5}^{p,v})\lambda_7 p$. Отсюда,$\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = D_{v_2,a}(a) = D_{e_{12},a}(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1 + (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w})\lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{12},z}\lambda_5 e_{12} - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t})\lambda_7 p$ для любых $v, w, z, t \in \mathcal{B}$. Заметим, что компоненты этой последней суммы не зависят от элемента a. Поэтому отображение Δ линейно и является локальным дифференцированием.

Из $\Delta(v_2 + p) = \Delta(v_2) + \Delta(p)$ мы получим $\big(a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p}\big)v_2 - \big(a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p}\big)p = (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w})v_2 - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t})p$. Отсюда,

$$a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p} = a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t}. \tag{3}$$

Из $\Delta(v_1 + v_2 + e_{12}) = \Delta(v_1) + \Delta(v_2) + \Delta(e_{12})$ мы получим $a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{2,2}^{v_1,v}, a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}} + a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w},\ \ a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{5,5}^{e_{12},z}$. Поэтому, $a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{v_1,v} + a_{5,5}^{e_{12},z}$. В силу (3), мы также получим что $a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t} = a_{2,2}^{v_1,v} + a_{5,5}^{e_{12},z}$. Поэтому, в силу предложения 1, Δ является дифференцированием. Это завершает доказательство. □

Предложение 4. *Линейное отображение* $\Phi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица* Φ *в стандартном базисе (1) имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2}a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}a_{5,5}} \end{pmatrix},$$

где $a_{2,2}$, $a_{5,5}$ – ненулевые элементы из $\mathbb{F}$. Здесь действие Φ соответствует умножению матрицы на правый столбец.

Доказательство. Пусть $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ — матрица автоморфизма Φ. Тогда существует дифференцирование D с матрицей $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ такое, что

$$B = e^{A}.$$

Известно, что

$$e^{A} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots,$$

где E – единичная матрица. Следовательно,

$$B = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots. \qquad (4)$$

В силу (4) и предложения 1 B равно следующей матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2,2}^{i}}{i!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_{2,2}+a_{5,5})^{i}}{i!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{5,5}^{i}}{i!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}(a_{2,2}+a_{5,5})^{i}}{i!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{2,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{2,2}+a_{5,5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{a_{5,5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(a_{2,2}+a_{5,5})} \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица является искомой матрицей. Доказательство завершено. □

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется локальным автоморфизмом, если для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ существует автоморфизм $\phi_x: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такой, что $\nabla(x) = \phi_x(x)$.

Теорема 5. *Каждый локальный автоморфизм на простой алгебре $\mathcal{B}$ является автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть ∇ – локальный автоморфизм на $\mathcal{B}$, и, пусть $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}})_{\mathrm{i,j}=1}^{7}$ – матрица ∇. Тогда

$$\nabla(v_1) = a_{2,2}^{v_1} v_1 = a_{2,2} v_1, \nabla(v_2) = a_{2,2}^{v_2} a_{5,5}^{v_2} v_2 = a_{3,3} v_2,$$
$$\nabla(e_{12}) = a_{5,5}^{e_{12}} e_{12} = a_{5,5} e_{12}, \nabla(p) = \frac{1}{a_{2,2}^{p} a_{5,5}^{p}} p = a_{7,7} p$$

а остальные компоненты матрицы A равны нулю. В то же время,

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{12} + p) = \nabla(v_1) + \nabla(v_2) + \nabla(e_{12}) + \nabla(p), \qquad (5)$$

и

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{12} + p) = a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_1 + a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_2 + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} e_{12} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}} p.$$

По (5) имеем

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} v_1 + a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}) v_2 + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} e_{12} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p}} p$$
$$= a_{2,2}^{v_1} v_1 + a_{2,2}^{v_2} a_{5,5}^{v_2} v_2 + a_{5,5}^{e_{12}} e_{12} + \frac{1}{a_{2,2}^{p} a_{5,5}^{p}} p.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} = a_{2,2}^{v_1}, a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} = a_{2,2}^{v_2} a_{5,5}^{v_2},$$
$$a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} = a_{5,5}^{e_{12}}, a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{12}+p} a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{12}+p} = a_{2,2}^{p} a_{5,5}^{p}.$$

Отсюда следует, что

$$a_{2,2}^{v_2} a_{5,5}^{v_2} = a_{2,2}^{v_1} a_{5,5}^{e_{12}}, a_{2,2}^{p} a_{5,5}^{p} = a_{2,2}^{v_1} a_{5,5}^{e_{12}}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2}^{v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2}^{v_1} a_{5,5}^{e_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5}^{e_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}^{v_1} a_{5,5}^{e_{12}}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по предложению 4 ∇ – автоморфизм. На этом доказательство заканчивается. □

Отображение (не обязательно линейное) $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется 2-локальным автоморфизмом, если для любых элементов $x,\ y \in \mathcal{A}$ существует автоморфизм $\phi_{x,y}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такой, что $\Delta(x) = \phi_{x,y}(x), \Delta(y) = \phi_{x,y}(y)$.

Теорема 6. *Каждый 2-локальный автоморфизм на простой алгебре* $\mathcal{B}$ *является автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть Δ – 2-локальный автоморфизм на $\mathcal{B}$, и пусть для элементов $a,\ b \in \mathcal{B}$, $\Phi_{a,b}$ – автоморфизм на $\mathcal{B}$ такой, что $\Phi_{a,b}(a) = \Delta(a)$, $\Phi_{a,b}(b) = \Delta(b)$, и пусть $A_{a,b} = (a_{i,j}^{a,b})_{i,j=1}^{7}$ – матрица $\Phi_{a,b}$. Тогда для любых $v,\ z \in \mathcal{B}$ существует автоморфизм $\Phi_{v,z}$ такой, что

$$\Delta(v) = \Phi_{v,z}(v), \Delta(z) = \Phi_{v,z}(z).$$

Пусть $A_{v,z} = (a_{i,j}^{v,z})_{i,j=1}^{n}$ – матрица автоморфизма $\Phi_{v,z}$.

Пусть $a = \lambda_1 1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11} + \lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \lambda_7 p$ – произвольный элемент из $\mathcal{B}$. Для каждого $v \in \mathcal{B}$ существует автоморфизм $\Phi_{v,a}$ такой, что

$$\Delta(v) = \Phi_{v,a}(v), \quad \Delta(a) = \Phi_{v,a}(a).$$

Затем из

$$\Phi_{v_1,v}(v_1) = \Phi_{v_1,a}(v_1),\ v \in \mathcal{B}$$

следует, что

$$a_{2,2}^{v_1,v} v_1 = a_{2,2}^{v_1,a} v_1.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{v_1,v} = a_{2,2}^{v_1,a}.$$

Поэтому,

$$\Delta(a) = \Phi_{v_1,a}(a) = \lambda_1 1 + a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{v_1,a} a_{5,5}^{v_1,a}\lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11}$$
$$+ a_{5,5}^{v_1,a}\lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_1,a} a_{5,5}^{v_1,a}}\lambda_7 p.$$

Точно так же из

$$\Phi_{v_2,v}(v_2) = \Phi_{v_2,a}(v_2),\ v \in \mathcal{B}$$

следует, что

$$\Delta(a) = \Phi_{v_2,a}(a) = \lambda_1 1 + a_{2,2}^{v_2,a}\lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{v_2,v} a_{5,5}^{v_2,v}\lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11}$$
$$+ a_{5,5}^{v_2,a}\lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \frac{1}{a_{2,2}^{v_2,a} a_{5,5}^{v_2,a}}\lambda_7 p.$$

Точно так же у нас есть

$$\Delta(a) = \Phi_{e_{12},a}(a) = +\lambda_1 1 + a_{2,2}^{e_{12},a}\lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{e_{12},a} a_{5,5}^{e_{12},a}\lambda_3 v_2$$
$$+ \lambda_4 e_{11} + a_{5,5}^{e_{12},v}\lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \frac{1}{a_{2,2}^{e_{12},a} a_{5,5}^{e_{12},a}}\lambda_7 p,$$
$$\Delta(a) = \Phi_{p,a}(a) = \lambda_1 1 + a_{2,2}^{p,a}\lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{p,a} a_{5,5}^{p,a}\lambda_3 v_2$$
$$+ \lambda_4 e_{11} + a_{5,5}^{p,a}\lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} + \frac{1}{a_{2,2}^{p,v} a_{5,5}^{p,v}}\lambda_7 p.$$

Следовательно,

$$\Delta(a) = \Phi_{v_1,a}(a) = \Phi_{v_2,a}(a) = \Phi_{e_{12},a}(a) = \Phi_{p,a}(a) =$$
$$\lambda_1 1 + a_{2,2}^{v_1,v}\lambda_2 v_1 + a_{2,2}^{v_2,w} a_{5,5}^{v_2,w}\lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{11} + a_{5,5}^{e_{12},z}\lambda_5 e_{12} + \lambda_6 e_{22} +$$

$\frac{1}{a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}}\lambda_7 p.$

для любых $v, w, z, t \in \mathcal{B}$. Заметим, что компоненты этой последней суммы не зависят от элемента a. Поэтому отображение Δ линейно и является локальным автоморфизмом. Линейный оператор Δ имеет следующую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2}^{v_1,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5}^{e_{12},z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}} \end{pmatrix}.$$

Из $\Delta(v_2 + p) = \Delta(v_2) + \Delta(p)$ мы получаем

$$a_{2,2}^{a,v_2+p}a_{5,5}^{a,v_2+p}v_2 + \frac{1}{a_{2,2}^{a,v_2+p}a_{5,5}^{a,v_2+p}}p = a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w}v_2 + \frac{1}{a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}}p.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{a,v_2+p}a_{5,5}^{a,v_2+p} = a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t}. \tag{6}$$

Из $\Delta(v_1 + v_2 + e_{12}) = \Delta(v_1) + \Delta(v_2) + \Delta(e_{12})$ мы получаем

$$a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{2,2}^{v_1,v}, a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{12}}a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w},$$

$$a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{12}} = a_{5,5}^{e_{12},z}.$$

Следовательно,

$$a_{2,2}^{v_2,w}a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}.$$

В силу (6) также имеем

$$a_{2,2}^{p,t}a_{5,5}^{p,t} = a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}.$$

Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2}^{v_1,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5}^{e_{12},z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}^{v_1,v}a_{5,5}^{e_{12},z}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по предложению 4 Δ – автоморфизм. Доказательство завершено. □

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Arzikulov. A characterization of derivations and automorphisms on some simple algebras /

F. Arzikulov, F. Urinboyev, Sh. Ergasheva // Ural Mathematical Journal. 2022. Vol. 8. № 2, P. 46–58.
2. R. Kadison. Local derivations / R. Kadison // Journal of Algebra. 1990. Vol. 130. P. 494–509.
3. Исаев И. М. Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств / И. М. Исаев, А. В. Кислицин // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447. № 3. С. 252–252
4. I. M. Isaev. Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities / I. M. Isaev, A. V. Kislitsin // Communications in Algebra. 2013. Vol. 41. № 12. P 4593–4601.
5. A. V. Kislitsin. An example of a central simple commutative finite-dimensional algebra with an infinite basis of identities / A. V. Kislitsin // Algebra and Logic. 2015. Vol. 54. P. 204–210.
6. Кислицин А. В. Простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств / А. В. Кислицин // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 3. С. 591–598.
7. P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. / P. Šemrl // Proceedings of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 125. P. 2677–2680.