ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА. 2023, №2

МАТЕМАТИКА

УДК 512.554.1
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_26

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА АЛГЕБРАХ ИСАЕВА-КИСЛИЦИНА

Арзикулов Фарходжон Нематжонович, д.ф.-м. н., доцент,
arzikulovfn@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана, Алмазарский район, улица Университетская 9. Ташкент, Узбекистан,
АГУ, улица Университетская 9, Андижан, Узбекистан
Уринбоев Фуркат Садикджанович, аспирант НамГУ,
furqatjonforever@gmail.com
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан
Абдумуминов Мурод, Магистр в НамГУ
НамГУ, улица Уйчи 316, Наманган, Узбекистан

***Аннотация**: В настоящей работе изучаются простые алгебры, не принадлежащие к известным классам алгебр (ассоциативным алгебрам, альтернативным алгебрам, алгебрам Ли, йордановым алгебрам и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры над полем характеристики 0 без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным. В настоящей работе мы рассматриваем такую алгебру – простую семимерную алгебру B. Мы доказываем, что каждое локальное дифференцирование алгебры B является дифференцированием и каждое 2-локальное дифференцирование алгебры B также является дифференцированием.*

***Ключевые слова**: простая алгебра, дифференцирование, локальное дифференцирование, 2-локальное дифференцирование, базис тождеств.*

A CHARACTERIZATION OF DERIVATIONS ON ISAYEV-KISLITSIN ALGEBRAS

Farkhodzhon Arzikulov Nematzhonovich, Ph.D. PhD, Associate Professor,
arzikulovfn@gmail.com
Institute of Mathematics named after Romanovsky Academy Sciences of Uzbekistan, Olmazor district, University street 9, Tashkent, Uzbekistan,
ASU, University street 129, Andijan, Uzbekistan
Furkat Urinboev Sadikdzhanovich, postgraduate student of NamSU,
furqatjonforever@gmail.com
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan
Murod Abdumuminov, Master at NamSU
NamSU, Uychi street 316, Namangan, Uzbekistan

***Abstract::** In the present paper we study simple algebras, which do not belong to the well-known classes of algebras (associative algebras, alternative algebras, Lie algebras, Jordan algebras, etc.). The simple finite-dimensional algebras over a field of characteristic 0 without finite basis of identities, constructed by Isayev and*

Kislitsin, are such algebras. In the present paper we consider such algebras: the simple seven-dimensional algebra B. We prove that every local derivation of the algebra B is a derivation, and every 2-local derivation of the algebra B is also a derivation. We also prove that every local automorphism of the algebra B is an automorphism, and every 2-local automorphism of the algebra B is also an automorphism.
Keywords: *Simple algebra, Derivation, Local derivation, 2-Local derivation, Automorphism, Local automorphism, 2-Local automorphism, Basis of identities.*

1. Введение. В настоящей работе изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования простых конечномерных алгебр без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным в [3].

Понятие локальных дифференцирований было введено и исследовано Кадисоном в [2]. Кадисон доказал, что всякое непрерывное локальное дифференцирование алгебры фон Неймана в двойственный банахов бимодуль является дифференцированием. Аналогичное понятие 2-локальных производных было введено Шёмрлем. Шёмрл доказал, что любое 2-локальное дифференцирование алгебры $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H является дифференцированием [7]. Впоследствии появилось множество новых результатов, связанных с описанием локальных и 2-локальных дифференцирований различных алгебр.

В настоящей статье мы продолжаем изучение дифференцирований простых алгебр. В данной работе изучены дифференцирования простых алгебр, не принадлежащих известным классам алгебр (коммутативным, ассоциативным, альтернативным, лиевым, жордановым и т. д.). Такими алгебрами являются простые конечномерные алгебры без конечного базиса тождеств, построенные Исаевым и Кислициным (см. [3]). А именно, мы доказываем, что любое локальное дифференцирование простой конечномерной алгебры без конечного базиса тождеств, построенное Исаевым и Кислициным в [3], является дифференцированием, а всякое 2-локальное дифференцирование этой алгебры также является дифференцированием. В [1] изучаются локальные и 2-локальные дифференцирования других таких алгебр, построенных Кислициным в [5], [6]. Отметим, что центральные простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств, рассматривались также в работе [4] Исаева и Кислицина.

2. Простая конечномерная алгебра без конечного базиса тождеств. Пусть $\mathcal{B} = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_{\mathbb{F}}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0, ненулевые произведения базисных элементов из

$$\{1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\} \quad (1)$$

определяются правилами $v_1e_{11} = v_1, v_1e_{12} = v_2, v_2e_{22} = v_2, v_2p = 1.$ Тогда $\mathcal{B}$ – простая алгебра без конечного базиса тождеств [3]. Пусть a – элемент из $\mathcal{B}$. Тогда мы можем написать $a = a_1 1 + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p,$ для некоторых элементов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ в $\mathbb{F}$. На протяжении всей статьи пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. И наоборот, если $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ – вектор-столбец с a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 в $\mathbb{F}$, то на протяжении всей статьи через $\hat{v}$ будем обозначать элемент $a_1 1 + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p$, то есть, $\hat{v} = a_1 1 + a_2v_1 + a_3v_2 + a_4e_{11} + a_5e_{12} + a_6e_{22} + a_7p.$

Пусть $\mathcal{A}$– алгебра. Линейное отображение $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для любых двух элементов $x, y \in$

$\mathcal{A}$. Нашим основным инструментом для описания локальных и 2-локальных дифференцирований $\mathcal{B}$ является следующее прдложение.

Предложение 1. *Линейное отображение $D: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ является дифференцированием тогда и только тогда, когда матрица D в стандартном базисе (1) имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{2,2}+a_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Здесь действие D соответствует умножению матрицы на правый столбец.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой свойства дифференцирования на алгебре $\mathcal{B}$. □

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется локальным дифференцированием, если для любого элемента $x \in \mathcal{A}$ существует дифференцирование $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $\nabla(x) = D(x)$.

Теорема 2. Каждое локальное дифференцирование на простой алгебре $\mathcal{B}$ является дифференцированием.

Доказательство. Пусть ∇ – локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{7}$ – матрица ∇. Тогда $\nabla(v_1) = a_{2,2}^{v_1} v_1 = a_{2,2} v_1, \nabla(v_2) = (a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2}) v_2 = a_{3,3} v_2,$

$\nabla(e_{1,2}) = a_{5,5}^{e_{1,2}} e_{1,2} = a_{5,5} e_{1,2}, \nabla(p) = -(a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p}) p = a_{7,7} p$ а остальные компоненты матрицы A равны нулю. В то же время,

$$\nabla(v_1 + v_2 + e_{1,2} + p) = \nabla(v_1) + \nabla(v_2) + \nabla(e_{1,2}) + \nabla(p), \qquad (2)$$

и $\nabla\big(v_1 + v_2 + e_{1,2} + p\big) = a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} v_1 + (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}) v_2 + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} e_{1,2} - (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}) p$. В силу (2), имеем

$$\begin{aligned} & a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} v_1 + (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}) v_2 + \\ & + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} e_{1,2} - (a_{2,2}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p} + a_{5,5}^{v_1+v_2+e_{1,2}+p}) p \\ & = a_{2,2}^{v_1} v_1 + (a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2}) v_2 + a_{5,5}^{e_{1,2}} e_{1,2} - (a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p}) p. \end{aligned}$$

Отсюда, $a_{2,2}^{v_2} + a_{5,5}^{v_2} = a_{2,2}^{v_1} + a_{5,5}^{e_{1,2}}, a_{2,2}^{p} + a_{5,5}^{p} = a_{2,2}^{v_1} + a_{5,5}^{e_{1,2}}$. Поэтому, в силу предложения 1, ∇ является дифференцированием. Доказательство завершено. □

В следующей теореме мы даем еще одну характеристику дифференцирований на алгебре $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Отображение (не обязательно линейное) $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется 2-локальным дифференцированием, если для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$ существует дифференцирование $D_{x,y}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) =$

$D_{x,y}(y)$.

Теорема 3. *Каждое 2-локальное дифференцирование на простой алгебре* $\mathcal{B}$ *является дифференцированием.*

Доказательство. Пусть Δ – 2-локальное дифференцирование на $\mathcal{B}$, и пусть для элементов $a, b \in \mathcal{B}$ $D_{a,b}$ – дифференцирование на $\mathcal{B}$ такое, что $D_{a,b}(a) = \Delta(a)$, $D_{a,b}(b) = \Delta(b)$, и, пусть $A_{a,b} = (a_{i,j}^{a,b})_{i,j=1}^{7}$ – матрица дифференцирования $D_{a,b}$. Пусь $a = \lambda_1 1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 + \lambda_4 e_{1,1} + \lambda_5 e_{1,2} + \lambda_6 e_{2,2} + \lambda_7 p$ – произвольный элемент из $\mathcal{B}$. Для каждого $v \in \mathcal{B}$ существует дифференцирование $D_{v,a}$ такое, что $\Delta(v) = D_{v,a}(v)$, $\Delta(a) = D_{v,a}(a)$. Тогда из $D_{v_1,v}(v_1) = D_{v_1,a}(v_1)$, $v \in \mathcal{B}$ следует что $a_{2,2}^{v_1,v} v_1 = a_{2,2}^{v_1,a} v_1$. Отсюда, $a_{2,2}^{v_1,v} = a_{2,2}^{v_1,a}$. Поэтому, $\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_1,a} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{v_1,a} + a_{5,5}^{v_1,a}) \lambda_7 p$. Аналогично, из $D_{v_2,v}(v_2) = D_{v_2,a}(v_2)$, $v \in \mathcal{D}$ следует что $\Delta(a) = D_{v_2,a}(a) = a_{2,2}^{v_2,a} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{v_2,v} + a_{5,5}^{v_2,v}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{v_2,a} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{v_2,a} + a_{5,5}^{v_2,a}) \lambda_7 p$. Точно также мы имеем $\Delta(a) = D_{e_{1,2},a}(a) = a_{2,2}^{e_{1,2},a} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{e_{1,2},a} + a_{5,5}^{e_{1,2},a}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{1,2},v} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{e_{1,2},a} + a_{5,5}^{e_{1,2},a}) \lambda_7 p$, $\Delta(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{p,a} \lambda_2 v_1 + \left(a_{2,2}^{p,a} + a_{5,5}^{p,a}\right) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{p,a} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{p,v} + a_{5,5}^{p,v}) \lambda_7 p$. Отсюда,$\Delta(a) = D_{v_1,a}(a) = D_{v_2,a}(a) = D_{e_{1,2},a}(a) = D_{p,a}(a) = a_{2,2}^{v_1,v} \lambda_2 v_1 + (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w}) \lambda_3 v_2 + a_{5,5}^{e_{1,2},z} \lambda_5 e_{1,2} - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t}) \lambda_7 p$ для любых $v, w, z, t \in \mathcal{B}$. Заметим, что компоненты этой последней суммы не зависят от элемента a. Поэтому отображение Δ линейно и является локальным дифференцированием.

Из $\Delta(v_2 + p) = \Delta(v_2) + \Delta(p)$ мы получим$\left(a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p}\right) v_2 - \left(a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p}\right) p = (a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w}) v_2 - (a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t}) p$. Отсюда,

$$a_{2,2}^{a,v_2+p} + a_{5,5}^{a,v_2+p} = a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t}. \qquad (3)$$

Из $\Delta(v_1 + v_2 + e_{1,2}) = \Delta(v_1) + \Delta(v_2) + \Delta(e_{1,2})$ мы получим $a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}} = a_{2,2}^{v_1,v}$, $a_{2,2}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}} + a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}} = a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w}$, $a_{5,5}^{a,v_1+v_2+e_{1,2}} = a_{5,5}^{e_{1,2},z}$. Поэтому, $a_{2,2}^{v_2,w} + a_{5,5}^{v_2,w} = a_{2,2}^{v_1,v} + a_{5,5}^{e_{1,2},z}$. В силу (3), мы также получим что $a_{2,2}^{p,t} + a_{5,5}^{p,t} = a_{2,2}^{v_1,v} + a_{5,5}^{e_{1,2},z}$. Поэтому, в силу предложения 1, Δ является дифференцированием. Это завершает доказательство. □

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Arzikulov. A characterization of derivations and automorphisms on some simple algebras / F. Arzikulov, F. Urinboyev, Sh. Ergasheva // Ural Mathematical Journal. 2022. Vol. 8. № 2, P. 46–58.

2. R. Kadison. Local derivations / R. Kadison // Journal of Algebra. 1990. Vol. 130. P. 494–509.

3. Исаев И. М. Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств / И. М. Исаев, А. В. Кислицин // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447. № 3. С.

252–252
4. I. M. Isaev. Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities / I. M. Isaev, A. V. Kislitsin // Communications in Algebra. 2013. Vol. 41. № 12. P 4593–4601.
5. A. V. Kislitsin. An example of a central simple commutative finite-dimensional algebra with an infinite basis of identities / A. V. Kislitsin // Algebra and Logic. 2015. Vol. 54. P. 204–210.
6. Кислицин А. В. Простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств / А. В. Кислицин // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 3. С. 591–598.
7. P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. / P. Šemrl // Proceedings of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 125. P. 2677–2680.