ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА. 2023, №2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.951.2
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_15

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор,
yusupjonapakov@gmail.com
Институт Математика им. В. И. Романовского
АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан
Мамажонов Санжарбек Мирзаевич, аспирант,
sanjarbekmamajonov@gmail.com
Институт Математика им. В. И. Романовского
АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В работе для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами с переменными коэффициентами рассмотрена одна краевая задача в прямоугольной области. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина. При обосновании равномерной сходимости установлена отличность от нуля “малого знаменателя”.*

Ключевые слова: *уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, младшие члены, краевая задача, единственность, существование, функция Грина.*

SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER NON-HOMOGENEOUS EQUATION WITH NON-SYMMETRIC TIME CONDITIONS

Apakov Yusupjon Pulatovich, doctor of
physical and mathematical sciences, professor,
yusupjonapakov@gmail.com
V. I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy
of Sciences, Tashkent, 100174, Uzbekistan,
Namangan Engineering-Construction Institute,
Namangan, 160103, Uzbekistan
Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich, post-graduate student,
sanjarbekmamajonov@gmail.com
V. I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy
of Sciences, Tashkent, 100174, Uzbekistan

Abstract: : *In this paper, for an inhomogeneous fourth-order equation with lower terms with variable coefficients, one boundary value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. The solution is written by the constructed Green's function. In substantiating the uniform convergence, the “small denominator” is established to be nonzero.*

Keywords: *fourth-order equation, multiple characteristics, lower terms, boundary value problem, uniqueness, existence, Green's function.*

1. Введение (Introduction). Изучение многих задач газовой динамике, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1]-[4]).

В данной работе в области $\Omega=\{(x,y):0<x<p,\,0<y<q\}$ рассматривается уравнение четвертого порядка в виде

$$U_{xxxx}-U_{yy}+A_1(x)U_{xxx}+A_2(x)U_{xx}+A_3(x)U_x+A_4(x)U+A_5U_y=F(x,y),$$

где $p,q,A_5\in R$, $F(x,y),\ A_i(x),\ i=\overline{1,4}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x,y)=u(x,y)\exp\left(-\frac{1}{4}\int_0^x A_1(\xi)d\xi+\frac{A_5}{2}y\right)$$

это уравнение можно привести к уравнению

$$L[u]=u_{xxxx}+a_1(x)u_{xx}+a_2(x)u_x+a_3(x)u-u_{yy}=f(x,y), \qquad (1)$$

где $a_i(x)$, $i=\overline{1,3}$ выражается через $A_j(x)$, $j=\overline{1,4}$ и A_5,

$$f(x,y)=\exp\left[\frac{1}{4}\int_0^x A_1(\xi)d\xi-\frac{A_5}{2}y\right]F(x,y).$$

Уравнение (1), обычно называется уравнением четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5] посвящена классификаций дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и решению краевых задач для таких уравнений. Согласно лемме 1.3 из [5], уравнение (1) относится к параболическому типу.

В работах [6]-[11] изучены ряд корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, разработанную в этих работах методику применяем для уравнения четвертого порядка.

Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. в работе [12] рассмотрели задачу с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками.

Сабитов К. Б, Фадеева О. В. в работе [13] решили задачу с начальными и граничными условиями для вынужденных колебаний консольной балки.

Иргашев Б. Ю. в статье [14] изучал краевую задачу для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина.

Уринов А.К., Азизов М.С. в работе [15] исследовали задачу для уравнения четвертого порядка с неизвестной правой частью.

Задача, изучаемая в данной статье, во многим отличается от упомянутых выше работ. Во-первых, в уравнение включены младшие члены. Во-вторых, в вышеупомянутых работах собственные функции найдены по переменной x, по y делают остальные выкладки. В нашем работе собственные функции находим по переменной y, а по x решаем задачу при помощи построения функции Грина и получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решая это уравнение находим решение поставленной задачи.

Для уравнения (1) в области Ω изучим следующую задачу.

Задача A**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$\begin{gathered}u(x,0)=u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p,\\ u(0,y)=\psi_1(y),\qquad u(p,y)=\psi_2(y),\\ u_{xx}(0,y)=\psi_3(y),\quad u_{xx}(p,y)=\psi_4(y),\quad 0\le y\le q,\end{gathered}\tag{2}$$

где $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$ заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работе [12] рассмотрен случай $a_1=a_2=0$, $a_3\ne 0$, а в работах [13], [15-17] исследованы краевые задачи для модельных уравнений четвертого порядка спектральном методом. В работах [18-19], исследованы краевые задачи для уравнения (1) когда все коэффициенты постоянные. В статье [20] исследовано первая краевая задача для уравнения (1).

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x)\le 0$, $a_1''(x)-a_2'(x)+2a_3(x)\ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u]\equiv 0,$$

т.е.

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx}-u_xu_{xx}+a_1(x)uu_x-\frac{1}{2}a_1'(x)u^2+\frac{1}{2}a_2(x)u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+\\ +u_{xx}^2-a_1(x)u_x^2+\left(a_3(x)+\frac{1}{2}a_1''(x)-\frac{1}{2}a_2'(x)\right)u^2+u_y^2=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Интегрируя тождество (3) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{gathered}\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2(x,y)\,dxdy-\int_0^p\int_0^q a_1(x)u_x^2(x,y)\,dydx+\int_0^p\int_0^q u_y^2(x,y)\,dxdy+\\ +\frac{1}{2}\int_0^p\int_0^q\left(a_1''(x)-a_2'(x)+2a_3(x)\right)u^2(x,y)\,dydx=0.\end{gathered}$$

Из третьего интеграла получим

$$u_y(x,y)=0\quad\Rightarrow\quad u(x,y)=h(x),$$

а из первого интеграла

$$u_{xx}(x,y)=0\quad\Rightarrow\quad u(x,y)=xb_1(y)+b_2(y).$$

Отсюда имеем следующий вывод, что

$$u(x,y)=h(x)=xb_1+b_2,\quad b_1,b_2=const.$$

Учитывая $u(0,y)=0$ и $u(p,y)=0$, имеем

$$u(0,y)=b_2=0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y)=b_1 x,$$
$$u(p,y)=b_1 p=0 \quad \Rightarrow \quad b_1=0.$$

Тогда имеем

$$u(x,y)=0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что при нарушении условий теоремы 1, однородная задача A для однородного уравнение (1) может иметь нетривиальные решения. Например, легко можно убедится, когда $a_1=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2>0$, $a_2=0$, $a_3=-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\right)^2<0$, задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y)+\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y)-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2p}\right)^2 u(x,y)-u_{yy}=0, \\ u(x,0)=u_y(x,q)=0, \\ u(0,y)=u(p,y)=u_{xx}(0,y)=u_{xx}(p,y)=0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u_{n,k}(x,y)=\sin\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}y\right), \quad n,k\in N.$$

Отсюда, следует, что если a_3 является параметром разделение, тогда при $a_3\geq 0$ задача корректно поставлена, при $a_3<0$ задача не корректна, т.е. существует спектр.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $C<\dfrac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+3\right)}$;

2) $\psi_i(0)=\psi_i'(q)=\psi_i''(0)=0$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$;

3) $f(x,0)=f_y(x,q)=0$, $\int\limits_0^q \left|f_{yy}(x,y)\right|dy<\infty$, $\int\limits_0^q \left|f_{xyy}(x,y)\right|dy<\infty$, $0\leq x\leq p$,

то решение задачи A существует. Здесь,

$$C=\max_{\xi\in[0,p]}\left\{\left|a_i^{(j)}(\xi)\right|,\left|a_1''(\xi)\right|, i=\overline{1,3},\ j=0,1\right\}, \quad \mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{4q}}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \\ Y(0)=Y'(q)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (4), существует только при

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}\right)^2, \quad n\in N.$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (4), а соответствующие ими собственные функции, которые образуют в $L_2[0,p]$ полную ортонормированную систему, имеют следующий вид:

$$Y_n(y)=\sqrt{\frac{2}{q}}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right).$$

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)\cdot Y_n(y). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), учитывая граничные условия (2), получим задачу:

$$\begin{cases} X_n^{(4)}(x)+a_1(x)X_n'''(x)+a_2(x)X_n'(x)+a_3(x)X_n(x)+\lambda_n X_n(x)=f_n(x), \\ X_n(0)=\psi_{1n},\ X_n(p)=\psi_{2n},\ X_n''(0)=\psi_{3n},\ X_n''(p)=\psi_{4n}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\psi_{in}=\int_0^q\psi_i(\eta)Y_n(\eta)d\eta,\quad i=\overline{1,4},\quad f_n(x)=\int_0^q f(x,\eta)Y_n(\eta)d\eta.$$

Введем обозначение

$$V_n(x)=X_n(x)-\rho_n(x), \tag{7}$$

здесь

$$\rho_n(x)=\frac{p-x}{p}\psi_{1n}+\frac{x}{p}\psi_{2n}+\frac{3x^2p-x^3-2xp^2}{6p}\psi_{3n}+\frac{x^3-xp^2}{6p}\psi_{4n}. \tag{8}$$

Учитывая (8), подставим (7) в (6), получим задачу

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x)+\lambda_n V_n(x)=g_n(x)-a_1(x)V_n'''(x)-a_2(x)V_n'(x)-a_3(x)V_n(x), \\ V_n(0)=V_n(p)=V_n''(0)=V_n''(p)=0, \end{cases} \tag{9}$$

здесь

$$g_n(x)=f_n(x)+d_{1n}(x)\psi_{1n}+d_{2n}(x)\psi_{2n}+d_{3n}(x)\psi_{3n}+d_{4n}(x)\psi_{4n},$$

$d_{in}(x)$, $i=\overline{1,4}$ – известные функции.

Ищем решение задачи (9) в следующем виде:

$$V_n(x)=\int_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^p G_n(x,\xi)\left(a_1(\xi)V_n'''(\xi)+a_2(\xi)V_n'(\xi)+a_3(\xi)V_n(\xi)\right)d\xi, \tag{10}$$

где $G_n(x,\xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x)+\lambda_n V(x)=0, \\ V_n(0)=V_n(p)=V_n''(0)=V_n''(p)=0, \end{cases}$$

которая обладает следующими свойствами:

$$G_{nxxxx}(x,\xi)+\lambda_n G_n(x,\xi)=0,\quad x\neq\xi,$$

$$G_n(0,\xi)=G_n(p,\xi)=G_{nxx}(0,\xi)=G_{nxx}(p,\xi)=0,$$

$$G_n(x,x-0)-G_n(x,x+0)=0,\quad G_{nx}(x,x-0)-G_{1nx}(x,x+0)=0,$$

$$G_{nxx}(x,x-0)-G_{nxx}(x,x+0)=0,\quad G_{nxxx}(x,x-0)-G_{nxxx}(x,x+0)=1.$$

В равенстве (10) интегрируя второе слагаемое по частям и введя обозначения

$$\beta_n(x) = \int_0^p G_n(x,\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x,\xi) = \left(a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi)\right) G_n + \left(a_2(\xi) - 2a_1'(\xi)\right) G_{n\xi} - a_1(\xi) G_{n\xi\xi},$$

получим

$$V_n(x) = \beta_n(x) + \int_0^p \bar{G}_n(x,\xi) V_n(\xi)\, d\xi, \tag{11}$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (11) с помощью резольвенты

$$V_n(x) = \beta_n(x) + \int_0^p R_n(x,\xi)\, \beta_n(\xi)\, d\xi, \tag{12}$$

где

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_{0n}(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi) = \int_0^p \bar{G}_n(x,s)\, \bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)\, ds,\ m = 1,2,\dots, \qquad \bar{G}_{0n}(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi).$$

В силу (5), (7), (8) и (12) решение задачи A имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(V_n(x) + \rho_n(x)\right) Y_n(y). \tag{13}$$

Проверим (13) на сходимость. В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Для оценки резольвенты мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{\infty} (Jp)^{m+1}, \tag{14}$$

где

$$J = C\left(\frac{2}{\mu_0} + \frac{3}{\mu_0^2}\left(1 + e^{-4\mu_0 p}\right) + \frac{3}{\mu_0^3}\right)\left(1 - e^{-2\mu_0 p}\right)^{-2}.$$

Условие 1, теоремы 2 можно записать в виде

$$C\left(\frac{2}{\mu_0} + \frac{3}{\mu_0^2}\left(1 + e^{-4\mu_0 p}\right) + \frac{3}{\mu_0^3}\right)\left(1 - e^{-2\mu_0 p}\right)^{-2} p < 1,$$

отсюда

$$Jp < 1,$$

тогда мажорирующий ряд (14) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится, и его оценка имеет вид

$$\left|R_n(x,\xi)\right| \le \frac{J}{1 - Jp} \le M. \tag{15}$$

Теперь оценим $\beta_n(x)$. Сначала, учитывая условия 2-3, теоремы 2, интегрируем по частям ψ_{in} три раза, а $f_n(x)$ два раза и находим следующие оценки:

$$|\psi_{in}| \le \frac{M}{n^3} |\Psi_{in}|, \quad i = \overline{1,4}, \quad \left|f_n(x)\right| \le \frac{M}{n^2} \left|\Phi_n(x)\right|, \quad n \in N. \tag{16}$$

где $\Psi_{in}=\sqrt{\frac{2}{q}}\int\limits_0^q \psi_i''''(\eta)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta$, $i=\overline{1,4}$, $\Phi_n(x)=\int\limits_0^q f_{\eta\eta}(x,\eta)Y_n(\eta)d\eta$.

Интегрируем $\beta_n(x)$ по частям один раз и находим оценку

$$\left|\beta_n(x)\right|\le\frac{M}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right|+\left|\Psi_{2n}\right|+\left|\Psi_{3n}\right|+\left|\Psi_{4n}\right|\right)+O\left(n^{-4}\right). \tag{17}$$

Согласно (15), (17) имеем

$$\left|V_n(x)\right|=\frac{M}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right|+\left|\Psi_{2n}\right|+\left|\Psi_{3n}\right|+\left|\Psi_{4n}\right|\right)+O\left(n^{-4}\right). \tag{18}$$

После некоторых вычислений находим оценку

$$\left|\rho_n(x)\right|\le\frac{M}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right|+\left|\Psi_{2n}\right|+\left|\Psi_{3n}\right|+\left|\Psi_{4n}\right|\right). \tag{19}$$

учитывая (18), (19) получим

$$\left|u(x,y)\right|\le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\left|\Psi_{in}\right|+\left|\Psi_{2n}\right|+\left|\Psi_{3n}\right|+\left|\Psi_{4n}\right|\right)+\sum_{n=1}^{\infty}O\left(n^{-4}\right)<\infty.$$

После некоторых вычислений находим оценку

$$\left|u_{xxxx}(x,y)\right|\le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left|\Psi_{1n}\right|+\left|\Psi_{2n}\right|+\left|\Psi_{3n}\right|+\left|\Psi_{4n}\right|\right)+\sum_{n=1}^{\infty}O\left(n^{-2}\right).$$

Используем неравенства Коши-Буняковского и Бесселя и имеем

$$\left|u_{xxxx}(x,y)\right|\le M\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{2n}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{3n}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{4n}\right|^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}O\left(n^{-2}\right)\le M\left(\left\|\psi_1''''(y)\right\|+\left\|\psi_2''''(y)\right\|+\left\|\psi_3''''(y)\right\|+\left\|\psi_4''''(y)\right\|\right)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}+\sum_{n=1}^{\infty}O\left(n^{-2}\right)<\infty,$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{in}\right|^2\le\left\|\psi_i''''(y)\right\|^2_{L_2(0,q)},\ i=\overline{1,4},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая уравнение (1), заключаем, что и u_{yy} тоже сходится. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел -Балкли / М.В.Турбин // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. -2013. -№ 2. -С. 246-257.

2. Уизем Дж. Линейние и нелинейные волны: монография / Дж.Уизем. -М.: Мир, 1977. -638 с.

3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка / С.А.Шабров // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. -2015. -№ 2. -С. 168-179.

4. Benney D.J. Interactions of permanent waves of finite amplitude / D.J.Benney, J.C.Luke // J. Math. Phys. 1964. 43. P. 309-313.

5. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка / Т.Д.Джураев, А.Сопуев. -Ташкент: Фан, -2000. -144 с.

6. Джураев Т.Д. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени / Т.Д.Джураев, Ю.П.Апаков // Украинский математический журнал. -2010, -том 62. -№1. -С. 40-51.

7. Apakov Yu.P. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics / Yu.P.Apakov, S.Rutkauskas // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. 2011. Vol. 16. №3. P. 255-269.
8. Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics / Yu.P.Apakov // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. Vol. 64. №1. P. 1-11.
9. Apakov Yu.P. Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation / Yu.P.Apakov, B.Yu.Irgashev // Ukrainian Mathematical Journal. 2015. Vol. 66. №10. -P. 1475-1488.
10. Apakov Yu.P. Third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics / Yu.P.Apakov, A. Kh. Zhuraev // Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 70, № 9. -P. 1467-1476.
11. Apakov Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation / Yu.P.Apakov // Lobachevski Journal of Mathematics. 2020 Vol. 41. №9. -P. 1754-1761.
12. Аманов Д. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом / Д.Аманов, М. Б.Мурзамбетова // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. -2013, -выпуск 1, -С. 3-10.
13. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки / К. Б.Сабитов, О. В.Фадеева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, -2021, -25:1, -С. 51-66.
14. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами / Б.Ю.Иргашев // Бюллетень Института математики, -2019, -№6, -С. 23-30.
15. Urinov A.K. Boundary Value Problems for a Fourth Order Partial Equation with an Unknown Right-hand Part / A.K.Urinov, M.S.Azizov // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42. №3. P. 632-640.
16. Аманов Д. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка / Д.Аманов, А.Б.Бекиев, Ж.А.Отарова // УзМЖ. -2015. -№4. -С. 11-18.
17. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий / К.Б.Сабитов // Дифференциальные уравнения, -2020, -том 56, -№6, С. 761-774.
18. Apakov Y.P. A boundary-value problem for the fourth order equation with multiple characteristics in a rectangular domain / Y.P.Apakov, S.M.Mamajonov // Nonlinear Oscillations. Published in vol. 24 (2021), No. 3, P. 291-305.
19. Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients / S.M.Mamajonov // Bull. Inst. Math., 2022, Vol. 5, No. 6, P. 100-109.
20. Апаков Ю.П. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами / Ю.П.Апаков, С.М.Мамажонов. // Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН), -2022, -№4, -С. 7-13.