МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_6

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физико-математических наук, профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Кыргызская Республика, г. Бишкек
Байсеркеева Айнура Бектургановна, кандидат физико-математических наук, доцент
a.baiserkeeva@mail.ru
Асылбек кызы Мээрим, магистрант
asylbekova1458@gmail.com
Иссык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова,
Кыргызская Республика г. Каракол,

Аннотация. *При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае нелокальную) задачи. В настоящей работе исследуется существование и единственность классического решения одной нелокальной задачи для одномерного неоднородного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод фундаментального решения. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций.*

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнениене, нелокальная задача, фундаментальное решение, задача Гурса, интегральное уравнение, краевая задача.*

ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИР ЛОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИЛИШИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, физика-математика илимдеринин доктору, профессор,
ablabekov_63@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети, Бишкек шаары,
Кыргыз Республикасы
Байсеркеева Айнура Бектургановна, физика-математика илимдеринин канддиты, доцент
a.baiserkeeva@mail.ru
Асылбек кызы Мээрим, магистрантка
asylbekova1458@gmail.com
К.Тыныстанов атындагы Ысык-Көл мамлекеттик университети,
Каракол шаары, Кыргыз Республикасы

Аннотация. *Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз (биздин учурда локалдык эмес) маселенин чыгарылышын билүү маанилүү роль ойнойт. Бул макалада биз үчүнчү тартиптеги бир өлчөмдүү бир тектүү эмес псевдопараболалык теңдеме үчүн локалдык эмес маселенин классикалык чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын изилдейбиз. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө үчүн фундаменталдык чыгарылыш ыкмасы колдонулат. Үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар классында каралып жаткан маселенин бир манилүү чыгарымдуулугунун жетиштүү шарттары алынган.*

Ачкыч сөздөр: *псевдопараболикалык теңдеме, локалдык эмес маселе, фундаменталдык чыгарылыш, Гурстун маселеси, интегралдык теңдеме, чектик маселе.*

SOLVABILITY OF ONE NONLOCAL PROBLEM FOR A PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Ablabekov Baktybai Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor,
ablabekov_63@mail.ru
Kyrgyz National University J. Balasagyna,
Kyrgyz Republic, Bishkek

Bayserkeeva Ainura Bekturganovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
a.baiserkeeva@mail.ru
Asylbek kyzy Meerim, master student
asylbekova1458@gmail.com
Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov,
Kyrgyz Republic, Karakol

Abstract. *In the study of inverse problems of mathematical physics, knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, nonlocal) problem plays an important role. In this paper, we study the existence and uniqueness of a classical solution of a nonlocal problem for a one-dimensional nonhomogeneous pseudoparabolic equation of the third order. The fundamental solution method is used to prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed. Sufficient conditions are established for the unique solvability of the problem under consideration in the class of continuously differentiable functions.*

Key words: *pseudoparabolic equation, nonlocal problem, fundamental solution, Goursat task, integral equation, boundary value problem.*

Введение

В настоящее время активно изучаются локальные и нелокальные начально-краевые задач для псевдопараболических уравнений из-за того, что прикладные задачи физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям и вызывают большой практический и теоретический интерес. Например, известно, что [1, 2] движение уравнение фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде описывается следующим уравнением:

$$\beta_0(x)D_t p(x,t) - div[\frac{k(x)}{\mu(x)} grad\, p(x,t) + \eta(x)\beta_0(x)D_t grad\, p(x,t)] = 0, \qquad (0.1)$$

где $p(x,t)$ - искомая функция, характеризирующая давление жидкости в трещинах; $k(x)$ - коэффициент проницаемости трещин; $\beta_0(x)$ - коэффициент сжимаемости жидкости; $\mu(x)$ - вязкость жидкости, $\eta(x)$ - коэффициент пьезопроводности. Задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды в капиллярно-пористых средах, описываются уравнением Аллера [3] (см. [4, с. 371]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right] + f(x,t), \qquad (0.2)$$

где $A-$ варьируемый параметр, $D(u)-$ коэффициент диффузитивности, являющийся функцией искомой влажности.

Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых задаются условия, связывающие значения искомого решения или его производных в различных точках границы и каких-либо внутренних точках.

Нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений с интегральными условиями изучены в работах А.Бузани [9, 10].

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений одной нелокальной задачи с одним локальным условием и одним периодическим условием для одномерного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Постановка задачи и основной результат.

В области $D_T = \{(x,t): 0 < x < l,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу определения функции $u(x,t)$ из уравнения

$$Lu \equiv u_t - u_{xxt} - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T \qquad (1)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0<x<l, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(0,t)=\mu(t), \quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t)=u_x(l,t), \quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $u_0(x), \mu(t)$, $f(x,t)$ - заданные, непрерывные при $[0,l]$, $[0,T]$, D_T соответственно функции.

Через $C^{(n,m)}(D_T)$ обозначен класс функций $u(x,t)$, определенных в D_T и таких, что $\partial^{k+l}u/\partial x^k\partial t^l\in C(D_T)$ при $0\le k\le n, \quad 0\le l\le m$; $C^{(0,0)}(D_T)$ обозначим через $C(D_T)$.

Определение. Классическим решение задачи (1)-(4) называется функция $u(x,t)$ из класса $C^{(2,1)}(D_T)\cap C^{(1,0)}(\bar{D}_T)$, удовлетворяющая условиям (1)-(4) в классическом смысле.

Справедлива

Теорема. Пусть выполнены для заданных функций следующие условия: 1) $u_0(x)\in C^2[0,l],\ \mu(t)\in C^1[0,T],\ f(x,t)\in C(\bar{D}_T)$, 2) $u_0(0)=\mu_1(0), u_0'(0)=u_0'(l)$. Тогда задача (1)-(4) имеет единственное решение, такое, что $u(x,t)\in C^{(2,1)}(D_T)\cap C^{(1,0)}(\bar{D}_T)$.

Доказательство. Обозначим $u_x(l,t)$ через $\psi(t)$ и рассмотрим следующую задачу Гурса для псевдопараболического уравнения: найти в области D_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и условиям Гурса

$$u(0,t)=\mu(t), u_x(0,t)=\psi(t), \quad 0\le t\le T. \tag{5}$$

Предположим, что $\psi(t)\in C^1[0,T]$, причем $\psi(0)=u_0'(l)$.

Тогда, в силу теоремы 3 из [4], задача (1), (2), (5) имеет единственное решение и это решение имеет вид

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int_0^t\int_0^x Z(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^x u_0(\xi)(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I)Z(x-\xi,t)d\xi\\&+[\psi(t)shx+\int_0^t\psi(\tau)(\frac{\partial}{\partial\tau}+I)Z(x,t-\tau)d\tau]+[\mu(t)chx+\\&+\int_0^t\mu(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x,t-\tau)d\tau]-u_0(0)Z(x,t)+u_0(x)e^{-t}-u_0(0)\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x},\end{aligned} \tag{6}$$

где $E(x,t)=\theta(t)Z(x,t)$ - фундаментальное решение оператора L:

$$Z(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi^2+1}e^{-\frac{\xi^2}{\xi^2+1}t+i\xi|x|}d\xi. \tag{7}$$

Вводя обозначение

$$K(x,t,\tau)=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+I\right)Z(x,t-\tau), \tag{8}$$

$$h(x,t)=\int_0^t\int_0^x Z(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^x u_0(\xi)(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I)Z(x-,t)d\xi+$$

$$+\mu(t)chx+\int_0^t \mu(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x,t-\tau)d\tau]-$$
$$-u_0(0)\left(\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}+Z(x,t)\right)+u_0(x)e^{-t}, \tag{9}$$

перепишем формулу (6) в виде

$$u(x,t)=\psi(t)shx+\int_0^t K(x,t,\tau)\psi(\tau)d\tau+h(x,t), \tag{10}$$

Далее исследуем функции $K(x,t,\tau)$ и $h(x,t)$.

Имеет место следующее утверждение

Лемма 1. При $t>\tau$ ядро $K(x,t,\tau)$ определяемое равенством (9) имеет непрерывные производные по x , t и при любых $k,l=0,1,2,\dots$,справедлива оценка

$$\left|D_x^2 D_t K(x,t,\tau)\right|\le\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+I\right)\frac{e^{-|x|(1-(t-\tau))}}{2}(1+(t-\tau))(2+|x|)^2. \tag{11}$$

Доказательство. Лемм 1 доказывается с помощью оценок функции $Z(x,t)$ и ее производных [5]:

$$\left|D_x^k D_t^l Z(x,t)\right|\le\frac{e^{-|x|(1-t)}}{2}(1+t)^k(2+|x|)^l .$$

Теперь оценим функцию $h(x,t)$, определяемое равенством (9). Так как

$u_0(x)\in C^2[0,l],\ \mu(t)\in C^1[0,T],\ f(x,t)\in C(\bar{D}_T)$, то $h(x,t)\in C^{(2,1)}(\bar{D}_T)$**,** то из (9) с учетом равенства (11) имеем

$$\left|h(x,t)\right|\le\int_0^t\int_0^x\left|Z(x-\xi,t-\tau)\right|\left|f(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau+\int_0^x\left|u_0(\xi)\right|\left|(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I)Z(x-,t)\right|d\xi+$$
$$+\left|\mu(t)\right|chx+\int_0^t\left|\mu(\tau)\right|\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x,t-\tau)\right|d\tau]+$$
$$+\left|u_0(0)\right|\left|\left(\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}+Z(x,t)\right)\right|+\left|u_0(x)\right|e^{-t}\le$$
$$\le C+\|f\|_C\int_0^t\int_0^x\frac{e^{-|x-\xi|(1-(t-\tau))}}{2}d\xi d\tau+\|u_0\|_C\int_0^x\left[\frac{e^{-|x-\xi|(1-(t-\tau))}}{2}\left((2+|x-\xi|)^2+1\right)\right]d\xi,$$

где С постоянные зависящее от заданных функций $u_0(x),\mu(t),\ f(x,t)$.

Далее можно показать, что справедливо оценка

$$\left|D_x^2 D_t h(x,t)\right|\le\frac{e^{-|x|(1-t)}}{2}(1+t)(2+|x|)^2 \,\mathbf{.} \tag{12}$$

Таким образом функции $K(x,t,\tau)$, $h(x,t)$ и их производные являются непрерывными и ограниченными функциями. В равенство (10) входит неизвестная функция $\psi(t)$.

Из леммы 1 и неравенств (11), (12) следует, что равенство можно дифференцировать по x и затем пологая $x=l$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\psi(t)$:

$$\psi(t)=A\int_0^t \frac{\partial K(l,t,\tau)}{\partial x}\psi(\tau)d\tau + A\frac{\partial h(l,t)}{\partial x}, \qquad (13)$$

где $A=(1-cshl)^{-1}$.

Ядро и правая часть интегрального уравнения (13) непрерывные и ограниченные функции. Тогда решение уравнения (13) имеет вид

$$\psi(t)=g(t)+\int_0^t R(t,\tau)g(\tau)d\tau, \qquad (14)$$

где $R(t,\tau)$ - резольвента ядра $A\dfrac{\partial K(l,t,\tau)}{\partial x}$, а $g(t)=A\dfrac{\partial h(l,t)}{\partial x}$.

Подставляя (14) в формулу (10) найдем явное решение задачи (1) -(4). Кроме того, из системы уравнений (10), (13) следует непрерывная зависимость решения задачи (1)-(4) от заданных функций $u_0(x)$, $\mu(t)$, $f(x,t)$. Теорема доказана.

Литература

1. Баренблатт, Г.И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт // Прикл. математика и механика. -1963. – Т. 27, №2. – С. 348– 350.
2. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах [Текст] /Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852– 864.
3. Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut national de la recherche Agronomique. 1964. № 9.
4. Чудновский, А.Ф. Теплофизика почвы [Текст] /А.Ф.Чудновский. –М.: Наука, 1976. - 352с.
5. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] /Б.С.Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
6. Аблабеков Б.С. Фундаментальное решение и задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [Текст] /Б.С.Аблабеков // Известия КГТУ им. И.Раззакова, №19, Бишкек 2009. - С.98-101.
7. Аблабеков Б.С. Начально-краевая задача для двумерного уравнения фильтрации жидкостей в трещиновато-пористой среде на неограниченном канале[Текст] /Б.С.Аблабеков // Исслед.по и.-д.у. Бишкек: Илим 2009. - Вып. 41. с.165-169.
8. Аблабеков Б.С. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.А.Курманбаева //
9. Bouziani A. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions [Текст] / A. Bouziani //J. Math. Anal. Appl. 291 (2004) 371–386.
10. Bouziani A. Solvability of a nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition [Текст]/ A. Bouziani // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 55 (2003), 883-904.