МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ С ДРОБНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физико-математических наук, профессор, Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, г. Бишкек
e-mail: ablabekov_63@mail.ru
Аблабекова Асел Бактыбаевна, аспирантка
e-mail: aselya05@mail.ru
Расулова Айзат Расуловна, магистрантка
e-mail:rasylovaaizat@gmail.com
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек

Аннотация. *В работе исследуется обратная задача определения неизвестного источника зависящего от времени в задаче Коши для уравнения диффузии с дробными по времени производными с переопределением в точке x = 0. Для решения обратной задачи используется фундаментальное решение уравнения диффузии с дробными по времени производными. Обратная задача сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. С помощью метода последовательных приближений доказывается существование и единственность решения рассматриваемой задачи. Также получена оценка устойчивости.*

Ключевые слова: *обратная задача, задача Коши, дробная производная Герасимова–Капуто, Функция Миттаг–Леффлера, интегральное уравнение.*

УБАКЫТ БОЮНЧА-БӨЛЧӨК ТУУНДУЛУУ ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕМЕСИНДЕГИ УБАКЫТТАН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети, Бишкек ш.,
e-mail: ablabekov_63@mail.ru
Аблабекова Асел Бактыбаевна, аспирант
e-mail: aselya05@mail.ru
Расулова Айзат Расуловна, магистрант
e-mail:rasylovaaizat@gmail.com
Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети, Бишкек ш.

Аннотация. *Бул иште убакыт-боюнча бөлчөк туундулу диффузиянын теңдеме үчүн Коши маселесиндеги убакытка көз каранды болгон белгисиз булак функциясын x = 0 чекитиндеги кайра аныктоо* *шарты менен аныктоо тескери маселеси изилденет. Тескери маселени чечүү үчүн убакыт боюнча бөлчөк туундулу диффузиялык теңдемесинин фундаменталдык чыгарылышы колдонулат. Тескери маселе экинчи түрдөгү эквиваленттүү сызыктуу Вольтерранын интегралдык теңдемеге келтирилет. Кезектеги жакындоо ыкмасын колдонуу менен биз каралып жаткан маселенин чечиминин бар экендигин жана уникалдуулугун далилдейбиз. Чыгарылыштын туруктуулук баалоосу да алынган.*

Урунттуу сөздөр: *тескери маселе, Коши маселеси, Герасимов – Капуто бөлчөк туундусу, Миттаг – Леффлер функциясы, интегралдык теңдеме.*

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING A TEMPORARY SOURCE IN THE HEAT EQUATION WITH TIME-FRACTIONAL DERIVATIVES

Ablabekov Baktybay Saparbekovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kyrgyz National University J. Balasagyn, Bishkek
e-mail: ablabekov_63@mail.ru
Ablabekova Asel Baktybaevna, postgraduate student
e-mail: aselya05@mail.ru
Rasulova Aizat Rasulovna, master student
e-mail: rasylovaaizat@gmail.com
Kyrgyz National University
J. Balasagyn, Bishkek

Abstract: *. The paper investigates the inverse problem of determining the unknown time-dependent source in the Cauchy problem for the diffusion equation with time-fractional derivatives with redefinition at the point x = 0. To solve the inverse problem the fundamental solution of the diffusion equation with time-fractional derivatives is used. The inverse problem is reduced to an equivalent linear Volterra integral equation of the second kind. Using the method of successive approximations, we prove the existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration. A stability estimate is also obtained.*

Keywords: *inverse problem, Cauchy problem, Gerasimov-Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function, integral equation.*

Введение. Термин дробное исчисление появился более 300 лет назад. Это обобщение обычного дифференцирования и интегрирования в нецелом (произвольном) порядке.

В этой работе рассматривается обратная задача определения источника, зависящее от времени в уравнении теплопроводности с дробными по времени производными по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи.

1. Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^α порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_t^\alpha\left[f\right](t)=I\left[f'(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau, & 0<\alpha<1,\\ f'(t), & \alpha=1,\end{cases} \tag{1.1}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\alpha}$ порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_{0t}^{-\alpha} f(t) = I^{\alpha}\left[f(t)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \; 0<\alpha<1, \\ \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau, \qquad\qquad \alpha = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Определение 3. Двупараметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемая формулой [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \; (\alpha>0, \quad \beta>0) \tag{1.3}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [3]:

$$E_{1,1}(z) = e^z, \qquad\qquad E_{1,1}(z) = \frac{e^z-1}{z}, \tag{1.4}$$

$$E_{2,1}(z) = ch\sqrt{z}, \; E_{2,1}(z) = \frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \tag{1.5}$$

$$E_{1/2,1}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z} erfc(-\sqrt{z}), \tag{1.6}$$

При $\beta = 1$ получим однопараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)} \equiv E_{\alpha}(z). \tag{1.7}$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при $\alpha, \quad (0<\alpha\le 1)$

$$D_{0t}^{-\alpha} D_t^{\alpha} z(t) = z(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z^{(\alpha-1)}(0). \tag{1.8}$$

2. Постановка задачи. Пусть $Q_T = \{(x,t): x\in\mathbb{R}, 0<t\le T\}$.

Рассмотрим следующее одномерное аномально-диффузионное уравнение:

$$Lu \equiv D_t^{\alpha} u - u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), x\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где $\varphi(x), \;\; F(x,t)$ – некоторые заданные функции.

Определение 1. Классическим решением задачи (2.1)-(2.2) в области Q_T назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_t^{\alpha} u(x,t)\in C(Q_T), \, u_{xx}(x,t)\in C(Q_T),$ которая удовлетворяет уравнению (2.1) при всех $(x,t)\in Q_T$, начальному условию (2.2) при всех $x\in\mathbb{R}$.

Для задачи (2.1), (2.2) справедлива теорема существования и единственности решения.

Лемма 1. Если $F(x,t)\in C_b(\bar{Q}_T), \, \varphi(x)\in C_b^2(\mathbb{R})$, то существует единственная функция $u(x,t)\in C_b^2(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющее задаче (2.1), (2.2).

Доказательство. Для доказательство этой леммы, используем представление следующей задачи Коши [3]:

$$Lu \equiv D_t^{\alpha} u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - C(x)u = F(x,t), \quad (x,t)\in Q_T$$

$$u(x,0) = u_0(x), x\in\mathbb{R}^n,$$

которое определяется формулой

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.3}$$

где

$$Z(x-\xi,t)=\pi^{-n/2}\left|x-\xi\right|^{-n} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{1}{4}t^{-\alpha}\left|x-\xi\right|^2\Big|_{(n/2,1/2)(1,1)}^{(1,\alpha)}\right],$$

$$Y(x-\xi,t-\tau)=\pi^{-n/2}\left|x-\xi\right|^{-n}(t-\tau)^{\alpha-1}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{1}{4}(t-\tau)^{-\alpha}\left|x-\xi\right|^2\Big|_{(n/2,1)(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}\right],$$

функция H является H – функцией Фокса. Функции $Y(x,t)$ и $Z(x,t)$ связаны формулой $Y(x,t)=D_t^{\alpha}Z(x,t)$. (см. [3]).

Из формулы (2.3) при $n=1$, имеем

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{2.4}$$

Отметим, что для функций $Z(x,t)$, $Y(x,t)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^i Z(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(1+i)}{2}}\exp\left\{-\mu_i t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right\},\quad i=0,1,2, \tag{2.5}$$

$$\left|\frac{\partial^i Y(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(1+i)}{2}-1+\alpha}\exp\left\{-\mu_i t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right\},\quad i=0,1,2, \tag{2.6}$$

для $x^2>t^{\alpha}$; $\mu_0:=(2-\alpha)^{\alpha/(2-\alpha)}2^{-2/(2-\alpha)}$ и μ_i может выбрано как μ_0.

$$\left|\frac{\partial^i Z(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(1+i)}{2}},\quad i=0,1,2, \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{\partial^i Y(x,t)}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{\alpha(i-1)}{2}-1},\quad i=0,1,2, \tag{2.8}$$

для $x^2\le t^{\alpha}$; $(x,t)\in Q_T$.

Для функции $Z(x,t)$ справедлива

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x,t)dx=1, \tag{2.9}$$

и верно неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Y(x,t)dx=C_0t^{\alpha-1},\quad t\in[0,T], \tag{2.10}$$

где C_0 зависит только от α.

Пусть $\varphi_0:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi(x)\right|$, $F_0:=\left\|F\right\|^{\alpha}$. Тогда из (2.3), (2.9), (2.10), имеем

$$\lfloor u(x,t)\rfloor\le\int\limits_{\mathbb{R}}\left|Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)\right|d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\left|Y(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau\le \\ \le\varphi_0+F_0\frac{T^{\alpha}}{\alpha}.$$

Аналогично, можно показать, что производные $D_t^{\alpha}u,u_{xx}$ тоже ограничены.

Перейдем теперь к исследованию обратной задачи.

Пусть $F(x,t)=f(t)h(x,t)+g(x,t)$, $h(x,t),g(x,t)$ – известные функции, а $f(t)$ – искомая функция.

$$u(0,t)=\psi(t),0\le t\le T, \tag{2.7}$$

Определение 2. Пару функций $\{u,\ f\}$ назовем решением задачи (2.1), (2.2) и (2.7), если

1) $u(x,t)$ классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) в Q_T,

2) $u(0,t)=\psi(t), 0\le t\le T.$

Теорема 1. Пусть функции удовлетворяют условиям $h(x,t), g(x,t)\in C_b^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\varphi(x)\in C_b^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, $\psi\in C^{1+\alpha}[0,T]$ и выполнено условие согласования $\phi(0)=\psi(0)$. Тогда решение обратной задачи (2.1), (2.2), (2.7) существует и единственно.

Доказательство. Заметим, что так как задача (2.1), (2.2), (2.7) линейна, то ее решение можно искать в виде

$$(u,\ f)=(v,0)+(w,\ f),$$

где

$$Lv=g(x,t), \qquad v(x,0)=\phi(x),$$

$$Lw=\ f(t)h(x,t), w(x,0)=0,\ w(0,t)=\psi(t)-v(0,t).$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы разрешимости задачи (2.1), (2.2), (2.7) достаточно доказать существование и единственность решения обратной задачи определения пары функций $\{w,\ f\}$ из условий

$$Lw=\ f(t)\,h(x,t), (x,t)\in Q_T, \tag{2.8}$$

$$w(x,t)=0, x\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

$$w(0,t)=\psi(t)-v(0,t)=\psi_0(t), 0\le t\le T. \tag{2.10}$$

Так как любое решение задачи (2.8)-(2.10) из пространства $H^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}$ имеет вид

$$w(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,f(\tau)h(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.11}$$

то применив оператор к равенству (2.11) D_t^{α}, и положив $x=0$, а также учитывая, что $D_t^{\alpha}w=w_{xx}+f(t)h(x,t)$, получим относительно $f(t)$ линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$D^{\alpha}\psi_0(t)=[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)h(\xi,\tau)\,d\xi]\big|_{x=0}f(\tau)\,d\tau+\ f(t)\,h(0,t),$$ или

$$f(t)=\int_0^t K(t,\tau)\,f(\tau)d\tau+D^{\alpha}\psi_0(t)/h(0,t), 0\le t\le T, \tag{2.12}$$

где

$$K(t,\tau)=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)h(y,\tau)\,dy\right]\Big|_{x=0}/\,h(0,t). \tag{2.13}$$

Как и в работе, можно показать, что ядро $K(t,\tau)$, определенное формулой (2.13), удовлетворяет неравенствам

$$\left|K(t,\tau)\right|<C_2, \tag{2.14}$$

$$\left|K(t,\tau)-K(t^{\circ},\tau)\right|\le C_3\left|t-t^{\circ}\right|^{\alpha/2}. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что решение интегрального уравнения (2.12) существует, единственно и имеет вид

$$f(t)=D^{\alpha}\psi_0(t)h^{-1}(0,t)+\int_0^t H(t,\tau)D^{\alpha}\psi_0(\tau)\,h^{-1}(0,\tau)\,d\tau, \tag{2.16}$$

где функция $H(t,\tau)$, разрешающее ядро для $K(t,\tau)$.

Покажем, что функция $f(t)$, определенная формулой (2.16), принадлежит пространству $C^{\alpha/2}[0,T]$. Для этого рассмотрим разность $f(t)-f(t^{\circ})$. Тогда из (2.12) получаем

$$h(0,t)f(t)-h(0,t^{\circ})f(t^{\circ})=D^{\alpha}\psi_0(t)-D^{\alpha}\psi_0(t^{\circ})-\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^{t^{\circ}} K(t^{\circ},\tau)f(\tau)d\tau=D^{\alpha}\psi_0(t)-D^{\alpha}\psi_0(t^0)-$$

$$-\int_0^t [K(t,\tau)-K(t^0,\tau)]f(\tau)\,d\tau. \tag{2.17}$$

Из (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) и предположений теоремы получаем неравенство

$$\left|f(t)-f(t^0)\right|\le C_1\left|t-t^0\right|^{\alpha/2}+C_2\left|t-t^0\right|+C_3\left|t-t^0\right|^{\alpha/2}. \tag{2.18}$$

Из (2.18) получим, что $f(t)\in C^{\alpha/2}[0,T]$.

Теперь покажем, что пара функций $w(x,t)$, $f(t)$, где функция $f(t)$ определена формулой (2.16), а $w(x,t)$-формулой

$$w(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,h(\xi,\tau)\,f(\tau)d\xi\,d\tau \tag{2.19}$$

является решением задачи (2.8)-(2.10). Действительно, функция $w(x,t)$, заданная формулой (2.19), является единственным решением прямой задачи (2.8), (2.9), так как функция $w(x,t)\in C_b^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяет условиям (2.8), (2.9). Проверим, что условие (2.10) также выполнено. Пусть функция $\psi_1(t)=w(0,t)$ удовлетворяет равенству

$$D^{\alpha}\psi_1(t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,f(\tau)h(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big|_{x=0}+f(t)h(0,t), \tag{2.20}$$

Так как $f(t)$ – решение уравнения (2.12), то из (2.12) и (2.20) относительно функции $\psi_2(t)=\psi_0(t)-\psi_1(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение с дробной производной:

$$D^{\alpha}\psi_2=0, \psi_2(0)=0. \tag{2.21}$$

Следовательно, $\psi_0(t)=\psi_1(t)$ и условие (2.10) выполнено.

Отметим, что доказано не только существование решения, но и дан метод нахождения функции $f(t)$.

Единственность решения задачи I следует из следующей леммы.

Лемма 1. Пара функций $w(x,t), f(t)$ – решение задачи (2.8)-(2.10) тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$D^{\alpha}\psi_0(t)=\int_0^t K_1(t,\tau)f(\tau)d\tau+h(0,t)f(t),$$

где $K_1(t,\tau)=h(0,t)K(t,\tau)$, а функция w определяется формулой (2.19).

Доказательство. Было доказано, что если $f(t)$ решение (2.20), то задача (2.8)-(2.10) имеет решение. Обратно, пусть w и f решение задачи (2.8)-(2.10). Так как $w\in C_b^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $f\in C^{\alpha/2}[0,T]$, то функция w представима в форме

$$w(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}} Y(x-\xi,t-\tau)\,h(\xi,\tau)\,f(\tau)d\xi\,d\tau.$$

Из условия (2.10) и уравнения (2.10) получим, что $f(t)$ – решение интегрального уравнения (2.20). Лемма 1 доказана.

Таким образом, мы показали, что решение обратной задачи (2.8)-(2.10) существует и единственно. Следовательно, существует единственное решение задачи (2.1)-(2.3). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J. “Theory and Applications of Fractional Differential Equations,” North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, 2006.
2. Miller K. S. and. Ross B. “An Introduction to the Frac-tional Calculus and Fractional Differential Equations,” John Wiley, New York, 1993.
3. Podlubny I. “Fractional Differential Equations,” Aca-demic Press, San Diego, New York, London, 1999.
4. Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy Problem for Fractional Diffusion Equations, Vol. 199, yr.2018.pages 211-255.
5. Аблабеков Б.С., Жуман кызы.А. О разрешимости первой начально-краевой задачи для одномерного псевдопараболического уравнения с дробными производными // Вестник Ошского государственного университета. 2022, № 1. С. 29-37.