УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_51

ОБ ОДНОЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Бараталиев Керим Бараталиевич, д.ф. –м.н., профессор,
barataliev k@mail.ru
Тилек кызы Нуржанат
nurjanat281199@gmail.com
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Рассматривается одна задача, которая относится к теории псевдодифференциальных операторов (сокращенно ПДО). Теория ПДО развилась из теории сингулярных интегральных операторов. В своей современной форме она было создана в середине 60-х годов двадцатого столетия. Поэтому, естественно, что одной из наиболее существенных областей приложения ПДО являются задачи, связанные сингулярными операторами. Рассматренная задача изучена с помощью методов теории вариационных неравенств. Доказаны теоремы существования, единственности и корректности решений рассматренных вариационных неравенств.*

Ключевые слова: *Псевдодифференциальные операторы; вариационные задачи; вариационные неравенства; вариационные уравнения; корректность значи.*

ПСЕДИФФЕРЕНЦИАЛЬДЫК ОПЕРАТОРЛОРДУН ТЕОРИЯСЫНА ТААНДЫК БОЛГОН БИР МАСЕЛЕ

Бараталиев Керим Бараталиевич, ф.-м.и.д., профессор
baratalievk@mail.ru
Тилек кызы Нуржанат
nurjanat281199@gmail.com
Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Псевдодиффеpенциалдык операторлордун (кыскача ПДО) теориясына таандык болгон бир математикалык маселе каралат. ПДО нун теориясы сингулярдык интегралдык теңдемелердин теориясынын негизинде өсүп чыккан жана өзүнүн азыркы заманбап формасына өткөн кылымдын 60-жылдарында түзүлгөн. Ошондуктан ПДО нун теориясынын негизги колдонулуштарынын бири болуп сингулярдык интегралдардын теориясы менен байланышкандыгы табийгий нерсе. Каралып жаткан математикалык маселе вариациалык барабарсыздыктардын теориясынын методдору менен изилденген жана анын чыгарылыштары бар экендиги, анын жалгыздыгы далилденген.*

Ачкыч сөздөр: *Псевдодифференциалдык операторлор; вариациялык маселе; вариациялык барабарсыздыктар; вариациялык теңдемелер;маселенин корректүүлүгү.*

ABOUT ONE PSEUDODIFFERENTIAL PROBLEM

Barataliyev Kerim Baratalievich, .Dr Sc., professor,
baratalievk@mail.ru
Tilek kyzy Nurzhanat
nurjanat281199@gmail.com
Kyrgyz National University J. Balasagyn,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *One problem is considered, which belongs to the theory of pseudodifferential operators (abbreviated as PDO). The theory of PDO has developed from the theory of singular integral operators. In its modern form, it was created in the mid-60s of the twentieth century. Therefore, it is natural that one of the most significant areas of application of PDOs are problems associated with singular operators. The considered problem is studied using the methods of the theory of variational inequalities. Existence, uniqueness, and well-posedness theorems for the solutions of the considered variational inequalities are proved.*

Key words: Pseudodifferential operators; variational problems; variational inequalities; variational equations; correctness means.

Введение

Многие важные прикладные задачи приводят к так называемым задачам с односторонними граничными условиями или к вариационным неравенствам. Простейшим примером такого рода является следующая задача: в области Ω с границей Г найти решение уравнения $\Delta u = f$, такое, что на Г выполняются условия

$$u \geq 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial u} \geq 0, \; u\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0.$$

Обобщенное решение этой задачи удовлетворяет не интегральному тождеству (как, в случае задачи Дирихле), а некоторому интегральному неравенству, которое и называют вариационным неравенством.

I. В монографии [1, С. 279] замечено, что можно изучать односторонние задачи (или вариационные неравенства) для псевдо дифференциальных операторов. Например, возьмем пространство $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $\Omega(-1,1)$ замкнутое выпуклое множество

$K = \{\upsilon \in V, \upsilon \geq 0 \upsilon \in V, \upsilon \geq 0$ п.в. в $\Omega = (-1,1)\}$; в $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ оператор

$$Au = \upsilon.p.\int_{-1}^{1} \frac{\dot{u}(y)}{x-y}dy\left(\dot{u} = \frac{du}{dy}\right). \tag{1}$$

Существует единственное $u \in K$, удовлетворяющее неравенству

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u) \qquad \forall v \in K \tag{2}$$

для заданного f из V'».

Интеграл (1) существует в смысле главного значения по Коши в пространстве $L_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, где скалярное произведение определяется формулой [3]

$$(u,v)_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)} = \int_{-1}^{1} \frac{u\upsilon \cdot dx}{\sqrt{(1-x)(x-1)}},$$

а сходимость в $L_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ является сходимостью в среднем квадратичном с весом

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-1)}}, |x| \leq 1.$$

Относительно подпространств $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и $V = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ пространства Соболева $H^S(\Omega)$ дробного порядка s [2,С. 71-85], отметим, что пространство $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ строго вложено в $V = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и имеет более сильную топологию, чем топология в $V = H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, причем

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{u \middle| u \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega); \rho^{-\frac{1}{2}} = u \in L_2(\Omega), \rho \in C_0^{\infty}(\Omega)\right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема [1]. Пусть Н гильбертово пространстве, $K \subset H-$ замкнутое выпуклое множество и $f \in H'$- заданный элемент, а оператор $A: K \to AK$ эллиптичен:

$$\exists\alpha>0:\ \alpha\|v\|^2\le\langle Av,v\rangle \qquad \forall v\in K \tag{3}$$

Тогда вариационное неравенство

$$\langle Au,v-u\rangle\ge\langle f,v-u\rangle \qquad \forall v\in K \tag{4}$$

не только однозначно разрешимо, но и корректно разрешимо.

Доказательство однозначной разрешимости вариационного неравенства (4) установлено в [1], остановимся лишь в том, что задача и корректно разрешима. В самом деле, пусть u_0 $и$ $u_\delta\in K-$ решения задачи (4), соответствующие заданным функциям f_0 $и$ $f_\delta\in(H_0^{1/2}(-1,1))'$, т.е.

$$(Au_0,v-u_0)\ge(f_0,v-u_0) \qquad \forall v\in K \tag{5}$$

и

$$(Au_\delta,v-u_\delta)\ge(f_\delta,v-u_\delta) \quad \forall v\in K\,, \tag{6}$$

где

$$\|f_0-f_\delta\|\le\delta \quad (\delta=const.>0).$$

Положив в (5) $v=u_\delta$, а в (6): $v=u_0$, имеем

$$(Au_0,v-u_0)\ge(f_0,u_\delta-u_0)\,,$$
$$(Au_\delta,u_0-u_\delta)\ge(f_\delta,u_0-u_\delta)$$

и сложив их, находим

$$\langle A(u_1-u_2),u_1-u_2\rangle\le\langle f_1-f_2,u_1-u_2\rangle\ .$$

Далее, из однозначной разрешимости вариационного неравенства (6) следует, что

$$\|u_0-u_\delta\|^2\le\|A^{-1}\|\cdot\|f_0-f\|_\delta,\|u_0-u_\delta\|.$$

Отсюда получаем условие корректности рассматриваемой задачи относительно свободного члена неравенства:

$$\|u_0-u_\delta\|\le\|A^{-1}\|\cdot\delta\,.$$

II. В том случае, когда множество совпадает со всем пространством, т.е. $K=H_0^{1/2}(-1,1)$ вместо вариационного неравенства (4) получаем вариационное уравнение

$$p.v.\int_{-1}^{1}\frac{\dot u}{t-x}dt=f(x)(|x|\le 1). \tag{7}$$

Это уравнение в литературе известно под названием интегро-дифференциальным уравнением Прандтля (см. [3], стр. 207) с граничными условиями

$$u(-1)=0\ \ ,\ \ u(1)=p \tag{8}$$

Из доказанной выше теоремы следует следующая

Теорема 2. Пусть $E=H-$гильбертово пространстве, $K\subset H-$замкнутое выпуклое множество и $f\in H'$- заданный элемент, а оператор A коэрцитивен:

$$\exists\alpha>0:\ \alpha\|v\|^2\le\langle Av,v\rangle \quad \forall v\in K,$$

Тогда уравнение (7) не только однозначно разрешимо, но и корректно разрешимо.

III. Если теперь ввести обозначение $\varphi(x)=\dot u(x)\ \ (|x|\le 1)$, то вместо (7) получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши

$$p.v.\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x) \quad (|x|\le 1)\,, \tag{9}$$

где заданная функция $f(x)$ принадлежит классу $H_\alpha(-1,1)$.

Известно (см., напр., [3], стр. 62), что общее решение уравнения (9) дается формулой

$$\varphi(x) = \frac{c}{\pi\cdot\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi\cdot\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}f(t)dt, \tag{10}$$

где с- произвольная постоянная.

Проинтегрируя обе части последнего равенства по x и принимая во внимание значение интеграла ([3], стр.208)

$$\int\frac{c}{\sqrt{1-x^2}(t-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}},$$

получим

$$u(x) = \frac{c}{\pi}\arcsin x + C_1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\int_{-1}^{1} f(t)\ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}dt;$$

Наконец, удовлетворяя граничным условиям (8), найдем

$$c = p,\ c_1 = 0{,}5p.$$

Тогда единственным решением задачи (8)-(9) является функция

$$u(x) = \frac{p}{\pi}\arcsin x + \frac{p}{2} + \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{1}H(t,x)f(t)dt, \tag{11}$$

где

$$H(t,x) = \ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}dt.$$

1V. Покажем теперь, что **задача** решения вариационного **неравенства (4)** эквивалентна **вариационной задаче:** найти функцию

$$u\in K : J(u) = \inf_{v\in K} J(v)\,. \tag{12}$$

где квадратичный функционал $J(v)\ (v\in K)$ определяется формулой

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v),\ v\in K \tag{13}$$

Пусть $a(u,v)-$ билинейная непрерывная форма, отвечающая

линейному непрерывному оператору $A\in J[H_{00}^{1/2}(-1,1),(H_{00}^{1/2}(-1,1))']$, т.е.

$$(Au,v) = a(u,v), Au\in(H_{00}^{1/2}(-1,1))', v\in(H_{00}^{1/2}(-1,1). \tag{14}$$

Тогда соотношение (12) эквивалентно неравенству [1]

$$a(u,v-u)\ge(f,v-u)\quad \forall v\in K \tag{15}$$

Наоборот, в силу решение вариационного неравенства (15) является и решением задачи (12).

Известно, что если билинейная непрерывная форма удовлетворяет условиям

$$a(u,v)=a(v,u) \qquad \forall u,v\in H_{00}^{\frac{1}{2}}(-1,1)$$

$$a(v,v)\geq\alpha\|v\|^2\ ,\alpha>0,\quad \forall v\in H_{00}^{1/2}(-1,1),$$

а если функционал $J(v)$ $\left(v\in H_{00}^{1/2}(-1,1)\right)$ выпуклый и дифференцируемый, то его производная, определяемая по формуле

$$(J'(u),v)=\frac{d}{d\lambda}J(u+\lambda v)\Big|_{\lambda=0},$$

равна

$$(J'(u),v)=a(u,v)-(f,v).$$

При этом множество $K\subset H_{00}^{\frac{1}{2}}(-1,1)$ является выпуклым и замкнутым. При выполнении выше перечисленных условий вариационная задача

$$u\in K: J(u)\leq J(v) \qquad \forall v\in K, \tag{16}$$

имеет единственное решение, а значит и вариационное неравенство (15) однозначно разрешимо в силу их эквивалентности.

Таким образом, методы решения вариационных задач пригодны и для решения вариационных неравенств.

V. В работе [3] подробно изучено полное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля с ядром Коши и с малым параметром ε ≥ 0

$$\text{p.v.}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)}{t-x}dt=\pi\cdot\varepsilon\cdot\varphi(x)-\pi\cdot f(x)\ \ (|x|\leq 1), \tag{18}$$

при граничных условиях

$$\varphi(-1)=0,\quad \varphi(1)=p\ .$$

Оператор, порожденный формулами (7)-(8), является частным случаем уравнения (18). Причем, если при заданном значении ε решение уравнения (18) существует, то функция $\varphi'(t)$ является ограниченной и с помощью неравенства

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leq\left|\int_{-1}^{1}\varphi'(t)dt\right|\leq\|\varphi'(t)\|_{L_p}\cdot|x_1-x_2| \qquad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$$

можно убедиться, что решение $\varphi(x)$ задачи (18)-(8) принадлежит классу $H_{00}^{1/2}(-1,1)([A],cmp.207)$.

Рассмотренный выше случай относится к случаю ε =0. А относительно случая ε≠0 отметим, что при этом уравнение (19) сводится [3] к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi(t)+\frac{\mu}{2\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)\varphi(t)dt=g(x)\ \ (|x|\leq 1), \tag{19}$$

где

$$g(x)=\frac{p}{\pi}\arg\sin x+\frac{p}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)f(t)dt,$$

$$H(t,x)=\ln\frac{1-tx+\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}{1-tx-\sqrt{(1-t^2)(1-x^2)}}\,dt.$$

В пространстве $L_2(-1,1)$ уравнение (19) представляет собой как операторное уравнение вида

$$A\varphi-\mu\varphi=g \quad (g\in L_2(-1,1)), \tag{20}$$

где $A-$ вполне непрерывной и самосопряженный оператор в $L_2(-1,1)$, для которого справедлива теорема Гильберта – Шмидта.

В заключение отметим, что уравнение Прандтля имеет важное значение в теории смешанных краевых задач и к нему приводятся ([2], стр. 206):

а) задача об обтекании идеальной жидкостью тонкого крыла конечного размаха;

в) задача о взаимодействии упругой на растяжение, но абсолютно гибкой накладки с упругой полуплосткостью и др.

Литература.

1. Лионс, Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач[Текст] / Ж.Л. Лионс. // М.: Мир, 1972. 587с.

2. Лионс, Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения[Текст] / Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес // М. Мир, 1971. – 371 с.

3. Александров, В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями[Текст] / В. М. Александров, Е.В. Комленко М.: 1986. -334с.