УДК 517.968
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_37

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМИ МАТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ

Асанов Авыт, д.ф.-м.н., профессор,
avyt.asanov@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий Университет Манас,
Бишкек, Кыргызстан
Асанов Рухидин Авытович, к.ф.-м.н., и.о. доцент,
ruhidin_asanov@yahoo.com
Международный Университет Центральной Азии,
Токмок, Кыргызстан
Асанова Каныкей Авытовна, к.ф.-м.н., стар.науч. сотр.,
kanya.asanova@gmail.com
Институт математики НАН КР,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Исследована система линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденными матричными ядрами но полуоси. Рассматриваемая система линейных интегральных уравнений третьего рода относиться к классу некорректных задач.На основе сравнительно нового подхода показано, что решения для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденными матричными ядрами но полуоси эквивалентно решению систем линейных алгебраических уравнений. Далее, изучены вопросы существования и единственности решения для этой системы линейных интегральных уравнений третьего рода.*

Ключевые слова: *решения, систем линейных интегральных уравнений, на полуоси, алгебраических, Фредгольма, третьего рода, эквивалентно.*

ЖАРЫМ ОКТОГУ МАТРИЦАЛЫК ЯДРОЛОРУ АЖЫРАГАН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМДУН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТEҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Асанов Авыт, д.ф.-м.н., профессор,
avyt.asanov@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий Университет Манас,
Бишкек, Кыргызстан
Асанов Рухидин Авытович, к.ф.-м.н., ага окутуучу,
ruhidin_asanov@yahoo.com
Международный Университет Центральной Азии,
Токмок, Кыргызстан
Асанова Каныкей Авытовна, к.ф.-м.н., ага.илим.кызм.,
kanya.asanova@gmail.com
Институт математики НАН КР,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Жарым октогу матрицалык ядролору ажыраган Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы изилденген. Үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы корректүү эмес маселелердин классына кирет. Салыштырмалуу жаңы ыкманын негизинде, жарым октогу Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү матрицалык ядролору ажыраган сызыктуу интегралдык теңдемелер системасынын бир классын чыгаруу маселеси, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын чыгаруу маселесине эквиваленттүү экени көрсөтүлгөн. Андан ары, үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин бул системасы үчүн чыгарылыштарынын бар экендиги жана жалгыздыгы изилденди.*

Ачкыч сөздөр: *чыгарылышы, сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы, жарым ок, алгебралык, Фредгольм, үчүнчү түрдөгү, эквиваленттүү.*

ON SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR INTEGRAL FREDHOLM EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH DEGENERATE MATRIX KERNELS ON THE SEMIAXIS

Asanov Avyt, Dr Sc, professor,
avyt.asanov@manas.edu.kg
Kyrgyz-Turkish Manas University,
Bishkek, Kyrgyzstan
Asanov Ruhidin Avytovich, Dr Sc, acting associate professor,
ruhidin_asanov@yahoo.com
International University of Central Asia,
Tokmok, Kyrgyzstan
Asanova Kanykei Avytovna, Dr Sc, senior researcher,
kanya.asanova@gmail.com
Institute of Mathematics of the NAS of the Kyrgyz Republic,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *A system of Fredholm linear integral equations of the third kind with degenerate matrix kernels on semi-axes is investigated. The considered system of linear integral equations of the third kind belongs to the class of ill-posed problems. Based on a relatively new approach, it is shown that solutions for one class of systems of Fredholm linear integral equations of the third kind with degenerate matrix kernels on semi-axes are equivalent to solving systems of linear algebraic equations. Further, the questions of the existence and uniqueness of the solution for this system of linear integral equations of the third kind are studied.*

Key words: *solutions, systems of linear integral equations, on the semi-axis, algebraic, Fredholm, of the third kind, are equivalent.*

1. Введение

Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались в $[1-15]$. В частности, в [3] для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В работах $[5-6]$ для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В [7] на основе нового подхода исследованы вопросы существования и единственности решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с особенностью в одной точке на конечном промежутке. В работе [8] исследованы вопросы существования и единственности решения для неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В [9] изучены вопросы регуляризации и единственности решения систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В [10] на основе подхода, предложенного в [8], изучен класс интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на конечном промежутке. В работах [13] и [14] на основе подходов предложенных в [7] и [10] разработан улучшенный новый подход исследования систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями на конечном промежутке. В [15] изучены вопросы существования и единственности решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностьями на оси.

В данной работе доказаны теоремы единственности и существования решения для систем интегральных уравнений (1).

Обозначим через $C_n[a,\infty)-$ пространство всех n - мерных вектор-функций с элементи из $C[a,\infty)$, где $C[a,\infty)-$ пространство всех непрерывных функций на $[a,\infty)$. Для векторов $u=(u_1,\dots,u_n)^T,\ v=(v_1,\dots,v_n)^T\epsilon\ R^n$ определим скалярное произведение по формуле

$$< u,v >= u_1v_1+\cdots+u_nv_n\,.$$

Через $L_p[a,\infty)$ обозначим пространство всех функций с интегрируемой p-й степенью на $[a,\infty)$, p$>$ 1.

Обозначим через $L_{p,n}[a,\infty)$ –пространство всех n - мерных вектор-функций с элементами из $L_p[a,\infty)$.

2. Системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси

Рассмотрим следующие системы интегральных уравнений

$$p(x)u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(x) \int_a^{\infty} B_j(y)u(y)dy + f(x),\ x\epsilon[a,\infty), \tag{1}$$

где $p(x)$ – известная непрерывная функция на $[a,\infty)$, $A_j(x)$ = ($a_{is,j}(x)$) и $B_j(x)$ = ($b_{is,j}(x)$) - $n \times n$ – мерные известные непрерывные матричные функции на $[a,\infty)$ $(j = 1,\dots,m)$, $f(x) = (f_i(x))$ – n– мерная известная непрерывная вектор-функция на $[a,\infty)$, $u(x) = (u_i(x))$ – n– мерная неизвестная непрерывная вектор-функция на $[a,\infty)$, λ – действительный параметр, $p(x_l) = 0, x_l\ \epsilon[a,\infty),\ l = 1,2,\dots,k.$

Всюду будем предполагать, что

$$p(x) = \prod_{e=1}^{k} p_l(x),\ p_l(x_l) = 0,\ p_l(x)\ \epsilon\ C(R), \tag{2}$$

$p_l(x) \neq 0$ при $x\ \epsilon\ R$ и $x \neq x_l,\ l = 1,\dots,k.$

Предположим выполнения следующих условий:

а) Для всех $l = 1,\dots,k,$ и $j = 1,\dots,m$ $A_{l,j}(x) = (\ a_{is,lj})$ – являются непрерывными матричными функциями на R, $a_{is,kj}(x) \in L_p[a,\infty)$,

$p > 1, b_{is}(x) \in L_q[a,\infty),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (\ i,s = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m)$ где

$$A_{0,j}(x) = A_j(x), A_{l,j}(x) = \frac{1}{p_l(x)}\left[A_{l-1,j}(x) - A_{l-1,j}(x_l)\right], x\epsilon[a,\infty);$$

б) Для всех $l = 1,\dots,k$ $f_l(x) = (f_{i,l}(x))$ – функции являются непрерывными функциями на $[a,\infty)$, $f_{i,k}(x) \in L_p[a,\infty), (i = 1,\dots,n)$ где

$$f_0(x) = f(x),\qquad f_l(x) = \frac{1}{p(x)}[f_{l-1}(x) - f_{l-1}(x_l)],\qquad x\ \epsilon\ [a,\infty).$$

Теорема. Пусть выполняются условия (2), а) и б). Тогда

1) если система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(x_1)c_j + f(x_1) = 0, \\ \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{1,j}(x_2)c_j + f_1(x_2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k-1,j}(x_k)c_j + f_{k-1}(x_k) = 0, \\ c_i = \int_a^{\infty} B_i(y)[\lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k,j}(y)c_j + f_k(y)]dy, i = 1,\dots,m, \end{cases} \tag{3}$$

относительно неизвестных векторов $c_1, c_2 \dots, c_m$ имеет единственное решения, то система интегральных уравнений (1) в пространстве $C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty), p > 1$ имеет единственное решение представимое в виде

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k,j}(x)c_j + f_k(x),\ x\ \epsilon\ [a,\infty); \tag{4}$$

2) если система линейных алгебраических уравнений (3) несовместимы, то интегральное уравнение (1) в пространстве $L_{p,n}[a,\infty), p > 1$ не имеет решения;
3) если система линейных алгебраических уравнений (3) имеет бесконечное число решений зависящий от q параметров, то интегральное уравнение (1) в пространстве $C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty), p > 1$ имеет бесконечное число решений зависящих от q

параметров. В этом случае, общее решения системы (1) определяется по формуле (4).

Доказательство. Сначала, пусть $u(t) \epsilon C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty)$ является решениям систем интегральных уравнений (1). Тогда, полагая $x = x_1$ из (1) имеем

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(x_1) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f(x_1) = 0, \quad (5)$$

Вычитая (5) из (1) получим

$$\prod_{l=1}^{k} p_l(x)\, u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} [A_j(x) - A_j(x_1)] \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f(x) - f(x_1).$$

Отсюда учитывая условия а) и

$$\prod_{l=2}^{k} p_l(x)\, u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{1,j}(x) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f_1(x),\ x \epsilon [a,\infty). \quad (6)$$

Если $k = 1$, то

$$\prod_{l=2}^{k} p_l(x) = 1,\ x \epsilon [a,\infty).$$

В случае, когда $k \geq 2$ полагая $x = x_2$ из (6) имеем

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} A_{1,j}(x_2) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + f_1(x_2) = 0. \quad (7)$$

Вычитая (7) из (6) и учитывая условию а) и б) получим

$$\prod_{l=3}^{k} p_l(x)\, u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{2,j}(x) \int_a^\infty B_j(y)\, u(y)dy + +f_2(x),\ x \epsilon [a,\infty). \quad (8)$$

Если $k = 2$, то

$$\prod_{l=3}^{k} p_l(x) = 1,\ x \epsilon[a,\infty).$$

В случае, когда $k \geq 3$, продолжая этот процесс убедимся, что решение систем уравнений (1) $u(x)$ удовлетворяют условию (3) и определяется по формуле (4).

Наоборот, пусть $u(x) \epsilon C_n[a,\infty) \cap L_{p,n}[a,\infty)$ определяется по формуле (4) и удовлетворяют условию (3). Умножая (4) на $p_k(x)$ и в силу (3) получим

$$p_k(x)u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k-1,j}(x)c_j + f_{k-1}(x),\ x \epsilon[a,\infty). \quad (9)$$

Далее умножая (9) на $p_{k-1}(x)$ и учитывая условию (3) получим

$$p_{k-1}(x)\, p_k(x)u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{k-2,j}(x)c_j + f_{k-2}(x),\ x \epsilon[a,\infty). \quad (10)$$

Продолжая этот процесс по отношению к системе (10) и учитывая условие (3) убедимся, что $u(t)$ является решением систем интегральных уравнений (1). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим системы интегральных уравнений (1) при n=2, m=1, k=2, $a = 0, x_1 = 0, x_2 = 3,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x - 3$, p> 1,

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 3 - x \end{pmatrix},\ B_1(y) = \begin{pmatrix} e^{-y} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x(x-3)e^{-x} + \beta x + \mu \\ \beta_1 x + \mu_1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda,\ \alpha, \beta, \mu, \beta_1, \mu_1$ − действительные параметры, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$A_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_{2,1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x-3)e^{-x} + \beta \\ \beta_1 \end{pmatrix},\ f_2(x) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix},\ x \epsilon[0,\infty).$$

Далее из (4) имеем

$$u_1(x) = \alpha e^{-x},\ u_2(x) = 0,\ x \epsilon[0,\infty). \qquad (11)$$

В этом случае система (3) записываются в следующим виде:

$$\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu\\ \mu_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta\\ \beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\alpha\\ 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда, получим:

1) Пусть $\lambda \neq 0,\ \beta = -0{,}5\ \alpha\lambda,\ \mu = 0,\ \beta_1 = 0\ , \mu_1 = 0.$ Тогда система интегральных уравнений (1) имеет единственное решение в пространстве $C_2[0,\infty) \cap L_{p,2}[0,\infty),\ p > 1,$ определяемое в виде (11).

2) Пусть $\lambda \neq 0$ и нарушается хотя бы один из следующих равенств: $\beta = -0{,}5\alpha\lambda, \mu = 0,\ \beta_1 = 0\ , \mu_1 = 0.$ Тогда система интегральных уравнений (1) не имеет решение в пространстве

$$C_2[0,\infty) \cap L_{p,2}[0,\infty), \qquad p > 1.$$

Литература

1. Цалюк, З.Б. В кн.: Итоги науки и техники [Текст] / З.Б. Цалюк //. Сер. Матем. анализ, М., 1977, т.15, с.131-198.
2. Лаврентьев, М.М. Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М.М. Лаврентьев // ДАН, 1959, т.127, №1, с.31-33.
3. Лаврентьев, М.М., Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский// М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Иманалиев, М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН, 1989, т.309, № 5, с.1052-1055.
5. Иманалиев, М.И. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода[Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН, 2007, т.415, №1, с.14-17.
6. Иманалиев, М.И. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН, 2010, т.430, №6, с.1-4.
7. Иманалиев, М.И. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, Р.А. Асанов // // ДАН, 2011, т.437, № 5, с.592-596.
8. Apartsyn, A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind [Text] / A.S. Apartsyn // VSP, Utrecht, The Netherlands, 2003, 168 pages.
9. Asanov, A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind [Text] / A.Asanov // VSP, Utrecht, The Netherlands,1998, 276 pages.
10. Asanov, A. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind [Text] / A.Asanov, K. Matanova, R. Asanov. // Kuwait Journal of Science, 2017,Vol.44, No 1, pp.17-28.
11. Bukhgeim, A.L. Volterra Equations and Inverse Problems [Text] / A.L. Bukhgeim // VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 204 pages.
12. Denisov, A.M. Elements of the Theory of Inverse Problems [Text] / A.M. Denisov // VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 272 pages.

13. Imanaliev, M.I. ” Solutions to Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities” [Text] / M.I. Imanaliev A.Asanov, R.A. Asanov //Doklady Mathematics, 2017, Vol. 95, No 3, pp. 235-239.

14. Imanaliev, M.I. ”On a class of Systems of Linear and Nonlinear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities” [Text] / M.I. Imanaliev A.Asanov, R.A. Asanov // Differential Equations, 2018, Vol.54, No.3, pp. 381-391.

15. Asanov, A. One Class of Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third Kind on the Real Line with Multipoint Singularities [Text] / A.Asanov, R.A. Asanov //Differential Equations, 2020, Vol. 56, pp. 1363–1370.