УДК 514.75

https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_13

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор,
yusupjonapakov@gmail.com,
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан
Хамитов Азизбек Ахмаджон угли, аспирант,
azizbek.khamitov.93@mail.ru,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В работе для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками рассмотрена краевая задача в трехмерном пространстве в полуограниченной области. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Существование решения доказано методом разделения переменных. Решение построено явно в виде бесконечного ряда, обоснована возможность почленного дифференцирования ряда по всем переменным.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение с частными производными, уравнение третьего порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование, ряд, полуограниченная область, абсолютная и равномерная сходимость.*

ON SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM POSED FOR AN EQUATION WITH THE THIRD ORDER MULTIPLE CHARACTERISTICS IN A SEMI-BOUNDED DOMAIN IN THREE DIMENSIONAL SPACE

Apakov Yupjon Pulatovich, Dr Sc, professor,
yusupjonapakov@gmail.com,
V.I.Romanovskii Institute of Matematics of the Academy of Sciences of the Uzbekistan,
Namangan, Uzbekistan
Hamitov Azizbek Ahmadjon uglu, Postgraduate Student,
Namangan Engineering-Construction Institute,
azizbek.khamitov.93@mail.ru,
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *In this work, the boundary value problem posed for an equation with the third order multiple characteristics in a semi-bounded domain in three dimensional space is considered. The uniqueness of a solution of the posed problem is proved by the method of energy integral. The existence of the solution is proved by means of the method of variables separation. The solution is constructed in form of the exact infinite series, and an opportunity of term-by-term differentiation of the series with respect to all variables is justified.*

Key words: *Partial differential equation, third order equation, multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, series, semi-bounded domain, absolute and smooth convergence.*

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка изучаются многими авторами (см., например, [1-11]).

В работе [12], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_xu_{xx},\quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско - параллельный поток [13].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [14], E. Del Vecehio[15]. L. Catabriga в работе [16] для уравнения $D_x^{2n+1}u-D_y^2u=0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [17-18] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t|\to\infty$.

2. Постановка задачи

В области $D^+=\{(x,y,z):\ 0<x<+\infty,\ 0<y<q,\ 0<z<r\}$ рассмотрим уравнения

$$L[u]\equiv\frac{\partial^3u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,\qquad(1)$$

где $q>0,\ \ r>0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача B. Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}(D^+)\cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(D^+\cup\Gamma)$, имеющего ограничение первой производной по $y,$ по z и второй производной по x при $x\to+\infty$, и $u_y,u_z\in L_2(D^+)$, удовлетворяющего следующими краевыми условиями

$$u_y(x,0,z)=u_y(x,q,z)=0,\ u_z(x,y,0)=u_z(x,y,r)=0,\ 0<x<+\infty,\qquad(2)$$

$$\begin{gathered}u(0,y,z)=\psi_1(y,z),\\ \lim_{x\to+\infty}u(x,y,z)=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,y,z)=0,\ 0\le y\le q,\ \ 0\le z\le r,\end{gathered}\qquad(3)$$

где $\Gamma=\partial D^+$ – граница области D^+, $\psi_1(y,z)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\frac{\partial\psi_1(0,z)}{\partial y}=\frac{\partial\psi_1(q,z)}{\partial y}=0,\frac{\partial^4\psi_1(y,0)}{\partial y^3\partial z}=\frac{\partial^4\psi_1(y,r)}{\partial y^3\partial z}=0.\qquad(4)$$

Отметим, что в плоскости полуограниченных областях изучены в работах [19-22], а в трехмерном пространстве для уравнения второго порядка в работах [23-24] исследованы некоторые корректные краевые задачи. А также в работах [25-28] в конечные области изучены краевые задачи в трехмерном пространстве.

3. Единственность решения

Теорема 1. Если задача B имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача B имеет два решения $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$. Тогда функция $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в D^+.

Для этого уравнения (1) умножим на *u*, тогда получим

$$uL[u]\equiv u\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0\text{, или}$$

$$u\,L[u]\equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right)+u_y^2-\frac{\partial}{\partial z}\left(u\,u_z\right)+u_z^2=0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области

$D_d=\{(x,y,z):\ 0<x<d,\ 0<y<q,\ 0<z<r\}$, где $d>0$, имеем

$$\begin{gathered}\int_0^q\int_0^r u(d,y,z)u_{xx}(d,y,z)dydz-\int_0^q\int_0^r u(0,y,z)u_{xx}(0,y,z)dydz-\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(d,y,z)dydz+\\+\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz-\int_0^d\int_0^r u(x,q,z)u_y(x,q,z)dxdz+\int_0^d\int_0^r u(x,0,z)u_y(x,0,z)dxdz-\\-\int_0^d\int_0^q u(x,y,r)u_z(x,y,r)dxdy+\int_0^d\int_0^q u(x,y,0)u_z(x,y,0)dxdy+\iiint_{D_d}u_y^2(x,y,z)dxdydz+\\+\iiint_{D_d}u_z^2(x,y,z)dxdydz=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Если $d\to+\infty$, то $D_d\to D^+$. При этом, учитывая однородные краевые условия задачи B, т.е. $\psi_1(y,z)=0$, свойства функции $u(x,y,z)$ при $x\to+\infty$ и $u_y,u_z\in L_2\left(D^+\right)$, из (6) получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz+\iiint_{D^+}u_y^2(x,y,z)dxdydz+\iiint_{D^+}u_z^2(x,y,z)dxdydz=0.$$

Отсюда следует, что $u_y(x,y,z)=0$ и $u_z(x,y,z)=0$, тогда $u(x,y,z)=f(x)$ в D^+. Поставляя в уравнение (1) имеем $f'''(x)=0$. Отсюда, $f(x)=C_1x^2+C_2x+C_3$. Из условии (3) получим $f(0)=0,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, тогда, $C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0$, отсюда имеем, что $f(x)=0.$ Следовательно, $u(x,y,z)\equiv 0$ в $D^+\cup\Gamma$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$.

Теорема 1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 2. Если функции $\dfrac{\partial^{i+j}\psi_1(y,z)}{\partial y^i\partial z^j}\in L_2\left[0<y<q,0<z<r\right],\ i,j=\overline{1,3}$ и выполняются условия согласования (4), то решение задачи B сушествует.

Доказательство. Решение задачи B ищем в виде

$$u(x,y,z) = \mathrm{X}(x)\cdot V(y,z). \tag{7}$$

Поставляя (7) в уравнение (1) и разделяя переменные, относительно функции $\mathrm{X}(x)$ получим уравнение:

$$\mathrm{X}''' + \lambda \mathrm{X} = 0, \tag{8}$$

а для функции $V(y,z)$ - следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ V_y(0,z) = V_y(q,z) = 0, \\ V_z(y,0) = V_z(y,r) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где λ - параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (9).

Положим

$$V(y,z) = Y(y)\cdot Z(z). \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (9), разделяя переменные, имеем задачи

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, \\ Y'(0) = Y'(q) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, \\ Z'(0) = Z'(r) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где ν и μ - постоянные, связанные соотношением $\nu + \mu = \lambda$.

Решение задачи (11), (12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} Y(y) = A_1 \sin\sqrt{\nu}\, y + B_1 \cos\sqrt{\nu}\, y, \\ Z(z) = A_2 \sin\sqrt{\mu}\, z + B_2 \cos\sqrt{\mu}\, z. \end{cases} \tag{13}$$

С учетом граничных условий, из (13) находим

$$\begin{cases} Y_n(y) = B_n \cos\dfrac{n\pi y}{q}, \\ Z_m(z) = B_m \cos\dfrac{m\pi z}{r}, \end{cases} \tag{14}$$

где $\nu_n = \left(\dfrac{n\pi}{q}\right)^2, \mu_m = \left(\dfrac{m\pi}{r}\right)^2, (n,m = 1,2,3,\ldots) -$ собственные значения.

Тогда, в качестве решения спектральной задачи (11), (12) возьмем функции

$$V_{n,m}(y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{qr}}, \ \text{если } n,m = 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{qr}} \cos\dfrac{n\pi y}{q} \cos\dfrac{m\pi z}{r}, \ \text{если } n,m \in N, \end{cases} \tag{15}$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \pi^2, \quad n, m \in N.$$

Отметим, что система собственных функций (15) задачи (11), (12) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2\left(D^+\right)$ и образует там базис [26].

Решение уравнения (8) имеет вид:

$$X_{n,m}\left(x\right) = C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m} x + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m} x \right), \qquad (16)$$

где

$$k_{n,m} = \sqrt[3]{\lambda_{n,m}} = \sqrt[3]{\nu_n + \mu_m} = \sqrt[3]{\left(\frac{n\pi}{q} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{r} \right)^2}.$$

Далее, по постановке задачи B следует, что

$$\lim_{x \to +\infty} X_{n,m}\left(x\right) = \lim_{x \to +\infty} X'_{n,m}\left(x\right) = 0.$$

Следовательно, в (16) необходимо считать, что $C_{2n,m} = C_{3n,m} = 0$. Тогда функция (16) примет вид

$$X_{n,m}\left(x\right) = C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x}. \qquad (17)$$

Теперь, в силу (7) решение задачи B ищем в виде

$$u\left(x, y, z\right) = X_0\left(x\right) V_0\left(y, z\right) + \sum_{n,m=1}^{+\infty} X_{n,m}\left(x\right) V_{n,m}\left(y, z\right). \qquad (18)$$

Функция, определяемая формальным рядом (18), удовлетворяет условиям (2).

Считая временно, что ряд в (18) и его производные сходятся равномерно и требуем от функции $u\left(x, y, z\right)$, определяемой рядом (18), выполнения краевых условий (3), получим

$$u\left(0, y, z\right) = \psi_1(y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{m,n=1}^{+\infty} C_{1n,m} \cos \frac{n\pi y}{q} \cos \frac{m\pi z}{r},$$

где $C_{1n,m}$ — коэффициенты Фурье функции $\psi_1\left(y, z\right)$, т.е.

$$C_{1n,m} = \psi_{1n,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \psi_1\left(y, z\right) \cos \frac{n\pi y}{q} \cos \frac{m\pi z}{r} dydz. \qquad (19)$$

Подставив $C_{1n,m}$ в (18), получим

$$u\left(x, y, z\right) = X_0\left(x\right) V_0\left(y, z\right) + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} \cos \frac{n\pi y}{q} \cos \frac{m\pi z}{r}. \qquad (20)$$

Теперь докажем, что ряд (20) и его производные u_{xxx}, u_{yy} и u_{zz} сходятся равномерно в области $D^+ \cup \Gamma$, то функция $u\left(x, y, z\right)$, определяемая этим рядом, даёт решение задачи B.

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (20). Из (20) имеем

$$\left|u(x,y,z)\right| = \left| X_0(x)V_0(y,z) + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} \cos\frac{n\pi y}{q} \cos\frac{m\pi z}{r} \right| \le$$
$$\le M_0 + \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}\right|. \tag{21}$$

Интегрируя по частям (19) и принимая во внимание условие (4), получим

$$\psi_{1n,m} = \left(\frac{qr}{\pi^2}\right)^3 \frac{\psi_{1n,m}^{(6)}}{n^3 m^3}, \tag{22}$$

где

$$\psi_{1\,n,m}^{(6)} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^6 \psi_1(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \sin\frac{n\pi y}{q} \sin\frac{m\pi z}{r}\, dydz,$$

Учитывая условия на заданные функции, из (21) имеем

$$\left|u(x,y,z)\right| \le M_0 + M_1 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|}{n^3 m^3} < \infty,$$

где $M_0, M_1 = const > 0.$

Отсюда следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (20) входящий в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^+ \cup \Gamma$. Для этого вычисляем производные по y и по z, из (20) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2}{\sqrt{qr}} \left(\frac{\pi}{q}\right)^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} n^2 \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} \cos\frac{n\pi y}{q} \cos\frac{m\pi z}{r},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2}{\sqrt{qr}} \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} m^2 \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} \cos\frac{n\pi y}{q} \cos\frac{m\pi z}{r}.$$

Оценим полученные равенства и учитывая (22), имеем

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M_2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|}{n m^3}, \qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M_3 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|}{n^3 m},$$

где $M_2 = \left(\frac{\pi}{q}\right)^2 M_1,\ M_3 = \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 M_1.$

Используя неравенства Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M_2 \sqrt{\sum_{m,n=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|^2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^3}\right)^2} \le \overline{M_2} \left\|\psi_1^{(6)}\right\| < \infty,$$
$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M_3 \sqrt{\sum_{m,n=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|^2} \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3 m}\right)^2} \le \overline{M_3} \left\|\psi_1^{(6)}\right\| < \infty,$$

так как

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n,m}^{(6)}\right|^2 \le \left\|\psi_1^{(6)}\right\|^2_{L_2[0<y<q,0<z<r]},\ \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{m=1} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \overline{M_2}, \overline{M_3} = const > 0.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость третьей производной по x ряда (20) следует из $\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right| \leq \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|$ и доказанного выше.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Abdullaev, O. K. On a problem for the third order equation with parabolic-hyperbolic operator including a fractional derivative [Text] / O. K. Abdullaev, A. A. Matchanova. // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol 43, pp. 275–283.
2. Андреев, А. А. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками [Текст] / А. А. Андреев, Ю.О. Яковлева // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки. 2013. № 30, 31–36 с.
3. Зикиров, О.С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка [Текст] / О.С. Зикиров // Рус. мат. Т. 2014. №58 (7). 53–60 с.
4. Репин, О. А., Кумыкова С. К. Задача со сдвигом для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами [Текст] / О. А. Репин, С. К. Кумыкова // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки. 2012. №29 (4), 17–25 с.
5. Сабитов, К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области [Текст] / К.Б. Сабитов // Дифферен. урав. 2011. №47, 706–714 с.
6. Сопуев, А. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Н.К. Аркабаев // Вестн. Томск. ун-та, мат. мех. 2013. №21 (1), 16–23 с.
7. Шхануков, М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [Текст] / М. Х. Шхануков // Дифференц. уравн. 1982. №18, 689–699 с.
8. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т. К. Юлдашев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С. 56-65.
9. Юлдашев, Т. К. Об интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т. К. Юлдашев // Рус. мат. 2015. №59 (9), 62–66 с.
10. Yuldashev, T.K. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel [Text] / T. K. Yuldashev, Yu. P. Apakov, A. Kh. Zhuraev // Lobachevskii J. Math. 2021. Vol 42, pp. 1317–1327.
11. Yuldashev, T.K. Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains [Text] / T. K. Yuldashev, B. I. Islomov, E. K. Alikulov // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol 41, pp. 926–944.
12. Рыжов, О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа [Текст] / О.С. Рыжов // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

13. Диесперов, В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения [Текст] / В.Н. Диесперов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.
14. Block, H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples [Text] / H. Block // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1- 30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.
15. Del Vicchio, E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ [Text] / Del Vicchio E. Sulleequazioni // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.
16. Cattabriga, L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple [Text] / L. Cattabriga // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.
17. Джураев, Т.Д. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.
18. Джураев, Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени [Текст] / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.
19. Апаков, Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ в неограниченных областях [Текст] / Ю.П. Апаков // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.
20. Апаков, Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях [Текст] / Ю.П. Апаков // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик, 2008. -№2(22). –С. 147-151.
21. Апаков, Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами [Текст] / Ю.П. Апаков // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2008. -№1. –С. 14-22
22. Апаков, Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю.П. Апаков // – Т.: «Fan va texnologiya», 2019, -156 с.
23. Апаков, Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений в конечной призматической области трехмерного пространства [Текст] / Ю.П. Апаков // Тез. докл. Всесоюзной школы молодых ученых. «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике» 2-часть, -Ташкент, ТошДУ.1988. -С. 5.
24. Апаков, Ю.П. О некоторых нелокальных задачах для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве [Текст] / Ю.П. Апаков // «Прямые и обратные краевые задачи математической физики» .- Тошкент, Фан, 1987,-С. 80-95.
25. Апаков, Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве [Текст] / Ю.П. Апаков, А.А. Хамитов // Научный вестник Наманганского государственного университета. – Наманган, 2020. - № 4. – С. 21-31.

26. Сабитов, К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины [Текст] / К.Б. Сабитов // Известия вузов. Математика 2021, № 10, - С. 60-70.
27. Юлдашев, Т. К. Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Т. К. Юлдашев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018, том 145, -С. 95–109.
28. Sidorov, S. N. Inverse Problem of Finding a Factor Depending on the Spatial Variables on the Right-Hand Side in a Parabolic-Hyperbolic Equation [Text] / S.N. Sidorov // Differential Equations. 2021. Vol. 57. No. 12. -pp 1585-1597.