

СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ ДВОЙНЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Терехов Сергей Владимирович

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, доцент

svlter@yandex.ru

ФГБНУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина», ул. Розы

Люксембург, 72, Донецк, 283048, ДНР, Россия

<https://orcid.org/0000-0003-3037-7258>

Аннотация. Привлечение алгебраических методов для априорного моделирования природных явлений и процессов позволяет выявить общие закономерности физического мира. Построение охватывающих алгебр приводит к новым числовым системам, с помощью которых можно получить не только известные соотношения и уравнения, но и установить новые зависимости. Кроме того, такой подход открывает возможность обнаружения новых алгебр с уникальными свойствами, отображающими неизвестные характеристики материальных объектов. В данной работе построена алгебра, изоморфная алгебре комплексных кватернионов Гамильтона и алгебре матриц Паули, а также алгебра, произведение чисел которой содержат левые и правые тривиальные слагаемые. Получены обобщения условий Коши-Римана для двойных кватернионов и показано, что первое условие из них отвечает большому числу физических уравнений (локальные законы сохранения массы и заряда, условие калибровки Лоренца, уравнение диффузии Фика и другие). Второе условие гипераналитичности двойного кватерниона задает эволюцию векторного компонента гиперфункции. Установлены кватернионные выражения, представляющие при различных параметризациях формулы релятивистской и классической механики, в частности, получены формулы для преобразования Лоренца. Введение в рассмотрение угловых двойных кватернионов позволяет получить формулы для скаляра Лоренца и соотношений де Бройля для энергии и импульса волны. Поиск собственных кватернионов для оператора 4-градиента сводится к решению уравнений затухающих или нарастающих колебаний. Наличие в гиперпространстве кватернионов особого вида соответствует сохранению 4-потенциалов на субстанциональном уровне при их изменении в локальной области. В этом случае компоненты кватерниона удовлетворяют уравнениям теории Максвелла. Найдено выражение для субстанционального оператора; на примере поля Максвелла показано наличие субстанциональной гипераналитичности 4-потенциала при отсутствии его гипераналитичности на локальном уровне. Установлен вид 4-силы, действующей на заряженное тело.

Ключевые слова: комплексное число, охватывающая алгебра, двойной кватернион, гиперпространство, уравнения физики, специальная теория относительности, механика Ньютона, колебания, волны, поля.

RELATIONS AND EQUATIONS OF PHYSICS IN HYPERSPACE OF DOUBLE QUATERNIONS

Terekhov Sergey Vladimirovich

Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Associate Professor

svlter@yandex.ru

A.A. Galkin Donetsk Physics and Technology Institute, 72 Roza Lyuksemburg Street, Donetsk,
283048, DPR, Russia

<https://orcid.org/0000-0003-3037-7258>

Abstract: The use of algebraic methods for a priori modeling of natural phenomena and processes makes it possible to reveal general regularities of the physical world. The construction of covering algebras leads to new number systems that allow one to derive not only known relations and equations but also to establish new

dependencies. Moreover, this approach opens the possibility of discovering new algebras with unique properties reflecting unknown characteristics of material objects. In this work, an algebra is constructed that is isomorphic to the algebra of complex Hamilton quaternions and the algebra of Pauli matrices, as well as an algebra whose multiplication contains left and right trivial terms. Generalizations of the Cauchy–Riemann conditions for double quaternions are obtained, and it is shown that the first of these conditions corresponds to a wide class of physical equations (local conservation laws of mass and charge, the Lorenz gauge condition, Fick’s diffusion equation, and others). The second condition of hyperanalyticity of a double quaternion determines the evolution of the vector component of a hyperfunction. Quaternionic expressions representing formulas of relativistic and classical mechanics under various parameterizations are established; in particular, formulas for the Lorentz transformation are obtained. The introduction of angular double quaternions allows one to derive formulas for the Lorentz scalar and the de Broglie relations for the energy and momentum of a wave. The search for eigenquaternions of the four-gradient operator reduces to solving equations of damped or growing oscillations. The presence of special quaternions in hyperspace corresponds to the conservation of four-potentials at a substantial level under their variation in a local region. In this case, the components of the quaternion satisfy Maxwell’s equations. An expression for the substantial operator is obtained; using the Maxwell field as an example, the existence of substantial hyperanalyticity of the four-potential is demonstrated in the absence of local hyperanalyticity. The form of the four-force acting on a charged body is established.

Keywords: complex number, covering algebra, double quaternion, hyperspace, physical equations, special relativity, Newtonian mechanics, oscillations, waves, fields.

Введение. Комплексные числовые системы

Идентичность математических формулировок кинетических процессов (например, диффузии по Фику, теплопроводности по Фурье) и локальных законов сохранения (например, массы, заряда), а также другие математические построения указывают на возможность использования единой числовой системы для описания физических явлений и процессов.

Известно [1-3], что обобщением системы действительных чисел являются комплексные величины вида

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, 0, +1. \quad (1)$$

Комплексные ($i^2 = -1$), дуальные ($i^2 = 0$) и двойные ($i^2 = +1$) числа (1) и им комплексно-сопряженные выражения

$$z^+ = x - iy. \quad (2)$$

нашли приложение в физике и геометрии [1-12]. Применение функций комплексного переменного (ФКП) $f(z, z^+) = u(x, y) + iv(x, y)$, в общем случае зависящих от аргументов (1) и (2), базируется на использовании аналитических функций, удовлетворяющих условиям Коши-Римана

$$\partial u(x, y)/\partial x = \partial v(x, y)/\partial y, \quad \partial u(x, y)/\partial y = -\partial v(x, y)/\partial x. \quad (3)$$

Условия (3) обеспечивают независимость ФКП $f(z, z^+)$ от зеркального аргумента (2) ($df(z, z^+)/dz^+ = 0$ по Фютеру (Fueter R.) описывает плоское движение жидкости без источников и вихрей, см., например, [9]) и интеграла от ФКП от пути интегрирования, вычисление пределов проводят при пренебрежении порядком стремления x и y к пороговым значениям. Систему равенств (3) можно записать в сокращенном виде, если воспользоваться инфинитезимальным оператором Ли

$$\nabla_L = \partial/\partial x + i\partial/\partial y. \quad (4)$$

Тогда система равенств (3) с учетом (4) примет вид

$$\nabla_L f(z, z^+) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в силу использования в (3)-(5) частных производных, указанные равенства выполняются на комплексной плоскости в любой точке и ее малой окрестности (локальный

уровень). Используя частное дифференцирование равенств системы (3), легко показать, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению

$$\Delta u(x, y) = \partial^2 u(x, y) / \partial x^2 + \partial^2 u(x, y) / \partial y^2 = 0, \quad (6)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа.

Обобщение комплексных чисел (1) получают с использованием принципа удвоения мнимых единиц (процедура Кэли-Диксона): вводится новая единица j ($j^2 = -1, 0, +1$), т.е. числа $x = x_1 + jx_2$ и $y = y_1 + jy_2$. Такой подход сопровождается составлением таблицы перемножения мнимых единиц, например, для комплексных кватернионов [3,9-12]

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (7)$$

Таким образом, кватернион в алгебраической форме

$$Q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, 0, +1 \quad (8)$$

или скалярно-векторном виде

$$Q = q_0 + \gamma \mathbf{q}, \quad \gamma^2 = -1, 0, +1. \quad (9)$$

Особый интерес представляет произведение векторных составляющих кватерниона

$$\gamma \mathbf{q} \gamma \mathbf{h} = \gamma^2 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} - \gamma [\mathbf{q} \times \mathbf{h}]), \quad \gamma^2 = -1, 0, +1, \quad (10)$$

где $\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} = \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha h_\alpha$ – скалярное, а $[\mathbf{q} \times \mathbf{h}] = i(q_2 h_3 - q_3 h_2) + j(q_3 h_1 - q_1 h_3) + k(q_1 h_2 - q_2 h_1)$ – векторное произведение.

Введение бесконечно малого оператора «тетра» (оператор 4-градиента)

$$\diamond = \partial / \partial q_0 + \gamma \partial / \partial \mathbf{q} = \partial / \partial q_0 + \gamma \nabla \quad (11)$$

(здесь $\nabla = i\partial / \partial q_1 + j\partial / \partial q_2 + k\partial / \partial q_3$ – оператор Гамильтона) позволяет записать условия гипераналитичности (аналог условий Коши-Римана (3)-(5) в гиперпространстве) кватернионной функции $F(Q, Q^+) = \varphi(q_0, \mathbf{q}) + \gamma \mathbf{A}(q_0, \mathbf{q})$ с учетом (7)-(11) в виде [13]

$$\diamond F = 0: \begin{cases} \partial \varphi / \partial q_0 + \text{div } \mathbf{A} = 0 \\ \partial \mathbf{A} / \partial q_0 + \text{grad } \varphi - \text{rot } \mathbf{A} = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

где $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$, $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$, $\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]$. В работах [13,14] приведены примеры применения развитого математического формализма к нахождению уравнений физической теории. В зависимости от физического содержания функций φ и $\mathbf{A}$ первое уравнение системы (12) может описывать диффузию Фика, теплопроводность Фурье, локальные законы сохранения массы и заряда, нормировку Лоренца в теории электромагнитного поля и тому подобные процессы. Второе уравнение системы (12) отображает разнонаправленность, например, соленоидального $\mathbf{K}_1 = -(\partial \mathbf{A} / \partial q_0 + \text{grad } \varphi)$ и вихревого $\mathbf{K}_2 = \text{rot } \mathbf{A}$ векторных полей.

Целью данной работы является нахождение естественного подхода к построению охватывающих алгебр для действительных чисел и отыскание соотношений и уравнений физики в гиперпространстве двойных кватернионов.

Построение охватывающих алгебр: обобщение множества действительных чисел

Рассмотрим комплексную плоскость и выберем на ней два базисных элемента 1 и i . По схеме [15] создадим из элементов вектор-столбец и ему комплексно-сопряженный объект

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \xi_1^+ \quad (13)$$

со скалярными произведениями ($\xi_1^T = (1 \ i)$, $\xi_2^T = (1 \ -i)$)

$$\begin{aligned} \xi_1^T \cdot \xi_1 = \xi_2^T \cdot \xi_2 = 1 + i^2 &= \begin{cases} 0, i^2 = -1, \\ 1, i^2 = 0, \\ 2, i^2 = +1, \end{cases} \\ \xi_1^T \cdot \xi_2 = \xi_2^T \cdot \xi_1 = 1 - i^2 &= \begin{cases} 2, i^2 = -1, \\ 1, i^2 = 0, \\ 0, i^2 = +1, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Представим действительный вектор X через векторы (13) с учетом определений (1) и (2)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z + z^+ \\ i(z - z^+) \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{z^+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что векторы (13) являются на плоскости базисными векторами.

Вычислим внешние произведения векторов (13)

$$\begin{aligned} \xi_1 \otimes \xi_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & i^2 \end{pmatrix} = \mu_0 + i\mu_3, \quad \xi_1 \otimes \xi_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -i^2 \end{pmatrix} = \mu_2 + i\mu_1, \\ \xi_2 \otimes \xi_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -i^2 \end{pmatrix} = \mu_2 - i\mu_1, \quad \xi_2 \otimes \xi_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & i^2 \end{pmatrix} = \mu_0 - i\mu_3, \end{aligned} \quad (16)$$

здесь матрицы

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix}; \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix}; \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для мнимых единиц

$$i^2 = -1: \nu_0 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \nu_1 = \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \nu_2 = \mu_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \nu_3 = \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17a)$$

единичной матрицей является μ_2 , а для

$$i^2 = +1: \mu_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \quad (17b)$$

матрица μ_0 . В (17b) матрица μ_1 является антисимметричной, так как $\mu_1 = -\mu_1^T$, а другие матрицы μ_0 , μ_2 и μ_3 – симметричными, для них выполняются равенства $\mu_0 = \mu_0^T$, $\mu_2 = \mu_2^T$ и $\mu_3 = \mu_3^T$.

Матрицы μ_α ($\alpha = 0,1,2,3$) образуют охватывающую алгебру гиперпространства и удовлетворяют соотношениям ($\det$ – детерминант матрицы):

$$\det \mu_0 = i^2, \det \mu_1 = 1, \det \mu_2 = -i^2, \det \mu_3 = -1; \mu_0^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = E, \mu_1^2 = -E, \quad (18)$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица. В таблице 1 представлены произведения матриц (17a) и (17b).

Таблица 1. Произведения базисных матриц для комплексных и двойных чисел

	$i^2 = -1$					$i^2 = +1$			
	v_0	v_1	v_2	v_3		μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
v_0	1	v_1	v_2	v_3	μ_0	1	μ_1	μ_2	μ_3
v_1	v_1	-1	v_3	$-v_2$	μ_1	μ_1	-1	μ_3	$-\mu_2$
v_2	v_2	$-v_3$	1	$-v_1$	μ_2	μ_2	$-\mu_3$	1	$-\mu_1$
v_3	v_3	v_2	v_1	1	μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	1

Заметим, что матрицы Паули σ_α ($\alpha = 0,1,2,3$) связаны с матрицами μ_α соотношениями $\sigma_0 = \mu_0$, $\sigma_1 = \mu_3$, $\sigma_2 = i_1 \mu_1$ ($i_1^2 = -1$), $\sigma_3 = \mu_2$. Представленная алгебра (176) также изоморфна алгебре комплексных кватернионов, если положить $e_0 = 1$, $e_1 = i = \mu_1$, $e_2 = j = -i_1 \mu_2$, $e_3 = k = i_1 \mu_3$ с выполнением правил (7) перемножения элементов.

Рассмотрим другой пример построения охватывающей алгебры, для чего представим разложение комплексного вектора Y с учетом определений (1) и (2)

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z + z^+ \\ z - z^+ \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{z^+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Из (19) видно, что ортонормированные векторы

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

со скалярными произведениями ($\zeta_1^T = (1 \ 1)/\sqrt{2}$, $\zeta_2^T = (1 \ -1)/\sqrt{2}$)

$$\zeta_1^T \cdot \zeta_1 = \zeta_2^T \cdot \zeta_2 = 1, \quad \zeta_1^T \cdot \zeta_2 = \zeta_2^T \cdot \zeta_1 = 0.$$

являются на гиперплоскости действительными базисными векторами.

Вычислим внешние произведения векторов (19), т. е. построим новое гиперпространство

$$\begin{aligned} \zeta_1 \otimes \zeta_1^T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \eta_0, \quad \zeta_1 \otimes \zeta_2^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \eta_1, \\ \zeta_2 \otimes \zeta_1^T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \eta_2, \quad \zeta_2 \otimes \zeta_2^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \eta_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Вырожденные матрицы η_α ($\alpha = 0,1,2,3$) имеют нулевые детерминанты ($\det \eta_\alpha = 0$) и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \eta_0^2 &= \eta_0, \quad \eta_1^2 = \eta_2^2 = 0, \quad \eta_3^2 = \eta_3, \\ \eta_0 \eta_1 &= \eta_1, \quad \eta_1 \eta_0 = 0, \quad \eta_0 \eta_2 = 0, \quad \eta_2 \eta_0 = \eta_2, \quad \eta_0 \eta_3 = \eta_3 \eta_0 = 0, \\ \eta_2 \eta_1 &= \eta_3, \quad \eta_1 \eta_2 = \eta_0, \quad \eta_2 \eta_3 = 0, \quad \eta_3 \eta_2 = \eta_2, \quad \eta_3 \eta_1 = 0, \quad \eta_1 \eta_3 = \eta_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно (22) своеобразность матриц η_α ($\alpha = 0,1,2,3$) состоит в следующем: в произведении двух гиперкомплексных чисел компоненты с элементами η_0 и η_2 первого сомножителя обнуляют компоненты правой половины второго числа, а с элементами η_1 и η_3 — левой (см. таблицу 2).

Таблица 2. Произведения матриц η_α ($\alpha = 0,1,2,3$)

	$i^2 - \text{любое}$			
	η_0	η_1	η_2	η_3
η_0	η_0	η_1	0	0
η_1	0	0	η_0	η_1
η_2	η_2	η_3	0	0
η_3	0	0	η_2	η_3

гиперпространстве.

Таким образом, базисные векторы разложений действительного и комплексного векторов при вычислении внешних произведений порождают охватывающие алгебры нового гиперпространства. В силу того, что алгебра двойных гиперкомплексных чисел и функций позволяет априори получать физически значимые соотношения и уравнения, рассмотрим механические движения в

Уравнения специальной теории относительности и механики Ньютона в гиперпространстве двойных кватернионов

Разделим гиперпространство на малые области со средним линейным размером L , в которых любой сигнал распространяется со скоростью, не превышающей c . Положение точки в гиперпространстве характеризуется временем t и радиус-вектором $\mathbf{R}$ в выбранной системе координат. Введем в рассмотрение безразмерные время $\tau = ct/L$ и пространственную координату $\mathbf{r} = \mathbf{R}/L$. Тогда событие в гиперпространстве определяется двойным кватернионом

$$S = \tau + \gamma \mathbf{r}, \quad \gamma^2 = +1, \quad (23)$$

и его зеркальным аналогом

$$S^+ = \tau - \gamma \mathbf{r}. \quad (24)$$

Произведение величин (23) и (24) задает интервал между событиями s

$$|S|^2 = SS^+ = S^+S = \tau^2 - r^2 = \pm s^2 \quad (25)$$

1. Равномерное, прямолинейное и ускоренное движения

Описание гиперпространства двойных кватернионов будем проводить с применением векторной алгебры Гиббса. Для произвольных скоростей движения параметризация гиперпространства осуществляется с использованием интервала между событиями s . Для скоростей значительно меньших предельной скорости c параметризация пространства производится применением времени τ . Смена событий с учетом (25) в первом случае происходит со скоростью

$$V = dS/ds = 1/\sqrt{1-(v/c)^2} + \gamma \mathbf{v}/c\sqrt{1-(v/c)^2}, \quad |V|^2 = 1 \quad (26)$$

($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ – скорость изменения радиус-вектора, $|\mathbf{v}| = v$), а во втором

$$V_0 = dS/d\tau = 1 + \gamma \mathbf{v}/c, \quad |V_0|^2 = 1 - (v/c)^2. \quad (27)$$

Из подвижной системы координат лабораторная система отсчета движется в противоположном направлении по отношению к перемещению подвижной системы. Поэтому вычислим величину S' , задающую при равномерном движении интервал между событиями в подвижной системе координат, как $S' = \tau' + \gamma \mathbf{r}' = SV^+$, где

$$\begin{cases} \tau' = (SV^+ + VS^+)/2 = (\tau - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c)/\sqrt{1-(v/c)^2} \\ \mathbf{r}' = (SV^+ - VS^+)/2\gamma = \{\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau/c + [\mathbf{r} \times \mathbf{v}/c]\}/\sqrt{1-(v/c)^2} \end{cases} \quad (28)$$

Система уравнений (28) обобщает формулы Лоренца [16, с. 28] на случай произвольного равномерного движения при отсутствии инвариантности интервала. Прямолинейность

движения (сонаправленность и параллельность векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$) соответствует обращению в нуль векторного произведения $[\mathbf{r} \times \mathbf{v}/c] = 0$ и равенству интервалов ($|S|^2 = |S'|^2$) в лабораторной и подвижной системах координат. При малых скоростях движения $\sqrt{1-(v/c)^2} \approx 1$, а перемещение вдоль радиуса-вектора переводит (28) в преобразование Галилея.

Оператор (11) по направлению скорости (27) равен

$$D = V_0 \diamond = (1 + \gamma \mathbf{v}/c)(\partial/\partial \tau + \gamma \nabla) = c^{-1} d/dt + \gamma d/d\mathbf{r} \quad (29)$$

Полные производные $d/dt = \partial/\partial \tau + \mathbf{v} \cdot \nabla$ и $d/d\mathbf{r} = \nabla + \{\mathbf{v} \partial/\partial \tau - [\mathbf{v} \times \nabla]\}/c$ определяют временные и пространственные изменения физической величины при движении со скоростью $\mathbf{v}$ от точки к точке гиперпространства (субстанциональный уровень).

Если материальный объект обладает мерой инерции (массой) m

$$M = m + \gamma \mathbf{J}_m/c, \quad |M|^2 = m^2 - (\mathbf{J}_m/c)^2 \quad (30)$$

(здесь $m = m/m_0$, m_0 – масса покоя, $\mathbf{J}_m$ – внутренний поток перераспределения массы), то первое условие гипераналитичности (12) отображает локальный закон сохранения массы

$$\partial m/\partial \tau + \text{div}(\mathbf{J}_m/c) = 0. \quad (31)$$

Согласно (31) тривиальность потока $\mathbf{J}_m = 0$ соответствует в гиперпространстве сохранению массы объекта в любой точке и ее малой окрестности (локальный уровень). Используя полный дифференциал [16, с. 72] и свойства оператора дивергенции [17, с. 180], запишем (31) с использованием субстанциональной производной d/dt

$$dm/dt + \text{div}(\mathbf{J}_m - m\mathbf{v}) + m \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (32)$$

Для случая потока $\mathbf{J}_m = m\mathbf{v}$ в несжимаемом ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) веществе уравнение (31) описывает объект с неизменной массой (субстанциональный уровень). Взятие операции дивергенция от второго условия (12) и учет (31) приводит к волновому уравнению Даламбера

$$\square m = \Delta m - \partial^2 m/\partial \tau^2 = 0, \quad (33)$$

где $\square = \Delta - \partial^2/\partial \tau^2$ – оператор Даламбера.

Импульс материального объекта с учетом (10), (27) и (30) равен

$$\mathbf{P}_0 = M\mathbf{V}_0 = \mathbf{p}_0 + \gamma \mathbf{p}_1, \quad (34)$$

где $\mathbf{p}_0 = m + \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{v}/c^2$, $\mathbf{p}_1 = \{m\mathbf{v} + \mathbf{J}_m - [\mathbf{J}_m \times \mathbf{v}/c]\}/c$. Для получения вида (34) в размерных величинах умножим это равенство на $m_0 c$

$$m_0 c \mathbf{P}_0 = \mathbf{p}_1 + \gamma \mathbf{p}_1, \quad (35)$$

здесь $\mathbf{p}_1 = m_0 c \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1 = m_0 c \mathbf{p}_0$. При $\mathbf{J}_m = 0$ соотношение (35) принимает вид

$$m_0 c \mathbf{P}_0 = m c + \gamma m \mathbf{v} = E/c + \gamma \mathbf{P}, \quad E = m c^2, \quad (36)$$

а его модуль

$$m_0^2 c^4 |M\mathbf{V}_0|^2 = E^2 - P^2 c^2, \quad P = |\mathbf{P}|. \quad (37)$$

Сравнение (37) с классическим выражением [16, с. 46] приводит к равенству

$$|M\mathbf{V}_0|^2 = 1 \Rightarrow m^2 [1 - (v/c)^2] = 1 \Rightarrow m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (38)$$

Гипераналитичность кватерниона (36) определяется системой уравнений вида (12), при этом первое уравнение системы описывает локальный закон сохранения импульса (энергии), а второе – смену динамического состояния системы при изменении импульса объекта.

$$d\mathbf{P}_1/d\tau = -\text{grad} E_1 + [(\mathbf{v}/c) \cdot \nabla] \mathbf{P}_1 + \text{rot} \mathbf{P}_1, \quad (39)$$

где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}/(m_0 c)$, $E_1 = E/(m_0 c^2)$.

С другой стороны ускорение тела с учетом (27) вычисляется по формуле

$$A_0 = dV_0/d\tau = \gamma \mathbf{a}/c^2, \quad \mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt. \quad (40)$$

Согласно модели Ньютона на материальный объект действует сила

$$MA_0 = \{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{J}_m / c + \gamma (\mathbf{m}\mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \mathbf{J}_m / c]) \} / c^2. \quad (41)$$

В размерных величинах равенство (41) приобретает вид

$$m_0 c^2 MA_0 = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{J}_m / c + \gamma (\mathbf{f} + [\mathbf{f}_0 \times \mathbf{J}_m / c]), \quad (42)$$

здесь $\mathbf{f}_0 = m_0 \mathbf{a}$, $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$. При $\mathbf{J}_m = 0$ сила $\mathbf{f} = m_0 c^2 d\mathbf{P}_1/d\tau$, а модуль кватернионной силы не зависит от массы тела и равен

$$|MA_0| = w / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad w = |\mathbf{a}| / c^2. \quad (43)$$

При $\mathbf{J}_m = 0$ произведение (35) на (23) равно

$$m_0 c^2 P_0 S = \varepsilon \tau + c \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \gamma (p c \tau + \varepsilon \mathbf{r} + c \mathbf{L}_p), \quad (44)$$

здесь величины $\varepsilon = m c^2$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\mathbf{L}_p = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ – момент импульса, а (42) на (23) –

$$m_0 c^2 MA_0 S = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} + \gamma (\mathbf{f} \tau + \mathbf{L}_f), \quad (45)$$

$\mathbf{L}_f = [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$ – момент силы. Наличие в формулах (44) и (45) моментов импульса $\mathbf{L}_p$ и силы $\mathbf{L}_f$ указывает на существование вращения подвижной системы координат.

2. Вращательное движение, колебания, волны, поля

Поворот системы координат будем описывать с помощью двойного кватерниона (применение комплексных кватернионов см., например, [18,19])

$$\Phi = \psi + \gamma \boldsymbol{\psi}, \quad \gamma^2 = +1, \quad (46)$$

где ψ – угол поворота, $\boldsymbol{\psi}$ – вектор-ориентир угла, определяющий его отсчет по правилу левого или правого винта. При малых скоростях вращения двойной кватернион угловой скорости с учетом определения (46) равен

$$\Omega = d\Phi/d\tau = \omega/c + \gamma \mathbf{k}, \quad |\Omega|^2 = (\omega/c)^2 - |\mathbf{k}|^2 = (\omega_0/c)^2, \quad (47)$$

здесь $\omega = d\psi/dt$ – круговая частота вращения, $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\psi}/dt$ – угловая скорость, $\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}/c$ – волновой вектор, $|\Omega|^2$ – скаляр Лоренца, ω_0 – круговая частота вращения в лабораторной системе отсчета. Умножение второго равенства (47) на произведение $(\hbar c)^2$ ($\hbar = h/(2\pi)$ – приведенная постоянная Планка) приводит с учетом (37) к равенству (36), причем

$$m_0 c^2 = \hbar \omega_0, \quad E = \hbar \omega, \quad \mathbf{P} = \hbar \mathbf{k}. \quad (48)$$

Кватернионное угловое ускорение Σ равно

$$\Sigma = d\Omega/d\tau = (\xi + \gamma \boldsymbol{\xi})/c^2, \quad (49)$$

где $\xi = d\omega/dt$ – скорость изменения частоты вращения, $\boldsymbol{\xi} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – угловое ускорение.

Величина

$$(S\Omega^+ + \Omega S^+)/2 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad (50)$$

задает фазу колебаний или фазу волны, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{r}$. Скорость и направление волны определяется соотношением

$$(S\Omega^+ - \Omega S^+)/2\gamma = \omega \mathbf{r}/c - \mathbf{k} \tau - [\mathbf{k} \times \mathbf{r}], \quad (51)$$

при этом линейная скорость распространения волны $\mathbf{v}/c = [\mathbf{k} \times \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]/c$, при ее равенстве $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \tau$ волна характеризуется только фазой.

Рассмотрим задачу о собственных кватернионах и значениях оператора (11) $\diamond Z = \lambda Z$ (λ – постоянное действительное число) в пространственно-временном континууме. Используя систему неоднородных уравнений вида (12) и дифференциальные операции векторного анализа градиент, дивергенция и ротор, получим уравнения

$$\square z + 2\lambda \partial z / \partial \tau - \lambda^2 z = 0, \quad (52)$$

$$\square \mathbf{Z} + 2\lambda \partial \mathbf{Z} / \partial \tau - \lambda^2 \mathbf{Z} + 2 \operatorname{rot} \mathbf{Y} = 0, \quad (53)$$

$$\partial \mathbf{Y} / \partial \tau = \operatorname{rot} \mathbf{Y} + \lambda \mathbf{Y}, \quad (54)$$

При $\lambda = 0$ уравнение (52) описывает продольные волны, перемещающиеся со скоростью c [20, с. 100], уравнение (53) – поперечные волны [20, с. 200], уравнение (54) – изменение завихренности поля $\mathbf{Y} = \operatorname{rot} \mathbf{Z}$.

Поиск решения уравнения (52) методом разделения переменных $z(\tau, \mathbf{r}) = z_1(\tau)z_2(\mathbf{r})$ [14] приводит к уравнениям

$$\ddot{z}_1 - 2\lambda \dot{z}_1 + \lambda^2 z_1 = \mp \sigma^2 z_1, \quad (55)$$

$$\Delta z_2 = \pm \sigma^2 z_2, \quad (56)$$

Уравнение (55) при $\lambda < 0$ описывает затухающие колебания [21, с. 223], а уравнение (56) со знаком минус в правой части – возникновение периодической пространственной структуры.

Согласно работам [22, 23] равенство 4-градиента 4-потенциала $\Phi = \varphi + \gamma \mathbf{A}$ кватерниону вида $U = 0 - \gamma U$ соответствует тривиальности субстанционального градиента (29) кватернионного поля:

$$D\Phi = 0 \Leftrightarrow \diamond \Phi = U: \begin{cases} \partial \varphi / \partial \tau + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \\ \partial \mathbf{A} / \partial \tau + \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\mathbf{U} \end{cases} \quad (57)$$

Первое уравнение системы (57) является условием калибровки Лоренца [17, с. 228], а второе уравнение (57) определяет равенство суммы безразмерных напряженностей электрического $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial \tau - \operatorname{grad} \varphi$ и магнитного $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ полей напряженности поля $\mathbf{U} = \mathbf{E} + \mathbf{H}$. Используя определения напряженностей электрического и магнитного полей, а также дифференциальные операции векторного анализа градиент, дивергенция и ротор, получим уравнения теории Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial \tau \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{U} = -\square \varphi, \square \varphi = -4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / \partial \tau - \square \mathbf{A}, \square \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j} / c \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (58)$$

где ρ – плотность электрического заряда, $\mathbf{j}$ – плотность тока.

В гиперпространстве двойных кватернионов уравнения (58) можно записать в виде

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{U} + \gamma \operatorname{rot} \mathbf{U} = \gamma \partial \mathbf{U} / \partial \tau - \square \Phi \\ \square \Phi = -4\pi \mathbf{J}, \mathbf{J} = \rho + \gamma \mathbf{j} / c \end{cases} \quad (59)$$

Условия гипераналитичности (12) кватерниона $\mathbf{J}$ дополняют уравнения (59) системой

$$\diamond \mathbf{J} = 0: \begin{cases} \partial \rho / \partial \tau + \operatorname{div}(\mathbf{j} / c) = 0 \\ \partial \mathbf{j} / c \partial \tau + \operatorname{grad} \rho - \operatorname{rot}(\mathbf{j} / c) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Уравнения вида (60) получают также при применении условий гипераналитичности (12) к кватернионным концентрационным и температурным полям, что приводит не только к уравнениям диффузии Фика и теплопроводности Фурье (первое уравнение системы (12)), но и к уравнениям для концентрационного и температурного потоков в этих моделях (второе уравнение системы (12)) [13].

Сила, действующая на заряженное тело, равна

$$F = JU^+ = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{U} / c + \gamma(\rho \mathbf{U} + [\mathbf{j} \times \mathbf{U}] / c) \Rightarrow \mathbf{f} = \rho \mathbf{U} + [\mathbf{j} \times \mathbf{U}] / c. \quad (61)$$

При выполнении равенств $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, $\mathbf{H} = -[\mathbf{v} \times \mathbf{E}] / c$ ($\mathbf{H} \cdot \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \cdot \mathbf{v} = 0$ – напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны, а вектор скорости волны перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) уравнение (61) принимает вид

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \rho [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] / c. \quad (62)$$

Второе слагаемое в уравнении (62) представляет собой силу Лоренца.

Заключение

Исследования природных феноменов проводят экспериментальными и теоретическими методами. Использование математического подхода опирается на непротиворечивую систему аксиом, в частности, при использовании алгебраических приемов. В данной работе проведено построение охватывающих алгебр, одна из которых изоморфна алгебре комплексных кватернионов Гамильтона и спинных матриц Паули. Продемонстрировано существование алгебр с уникальными свойствами.

Для априорного получения физически значимых соотношений и уравнений использовано гиперпространство двойных кватернионов с применением векторной алгебры Гиббса. Параметризация гиперпространства с помощью интервала между событиями дает возможность получения формул релятивистской, с помощью безразмерного времени – формул классической механики. Предложена кватернионная связь между интервалами в лабораторной и подвижной системах координат, приводящая к обобщенному преобразованию Лоренца. Если подвижная система координат перемещается равномерно, но не прямолинейно интервал между событиями не является инвариантом, т.е. интервал между событиями инвариантен только для равномерного прямолинейного перемещения подвижной системы отсчета.

Вычисление производной по направлению скорости при временной параметризации гиперпространства от 4-градиента позволяет получить выражения для субстанциональных производных по времени и пространственному аргументу. Обращение в нуль субстанциональной производной от кватерниона отвечает глобальному сохранению скалярной части кватерниона и динамическому изменению его векторной составляющей. Аналогичный феномен наблюдается при обращении в нуль 4-градиента кватерниона, но только на локальном уровне, то есть в исследуемой точке и ее малой окрестности.

При временной параметризации гиперпространства и отсутствии потока массы модуль кватернионного импульса равен единице, что приводит к связи между массами покоя и движения, а также известной связи между массой покоя, энергией тела и его импульсом. В этом случае модуль кватернионной силы не зависит от массы, а определяется скоростью движения и ускорением объекта.

Моделирование кинетических и динамических процессов осуществлялось с использованием оператора 4-градиента. Уравнения обнуления 4-градиента кватернионной

функции соответствуют ее независимости от комплексно-сопряженного аргумента, задавая гипераналитичность функции. При этом нулевая скалярная часть описывает в зависимости от физической природы кватернионной функции кинетические уравнения типа уравнения диффузии Фика, локальные законы сохранения, условие калибровки полевых потенциалов. Векторная составляющая уравнения описывает новые уравнения динамической эволюции физических потоков. Равенство 4-градиента одной гиперфункции другой гиперфункции с нулевой скалярной частью приводит к гипераналитичности гиперфункции на субстанциональном уровне. Если гиперфункция описывает потенциалы электромагнитного поля, то рассматриваемое уравнение приводит к уравнениям Максвелла. Одним из уравнений задачи по отысканию собственных функций и значений оператора 4-градиента функции в гиперпространстве двойных кватернионов является уравнение затухающих колебаний при отрицательных собственных значениях. Для тривиального собственного значения полученные уравнения описывают продольные и поперечные волны, а также эволюцию вихря поля.

Литература

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
2. Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. Гиперкомплексные числа в теории физических структур // Известия вузов. Математика. 2008. № 10. С. 25-30.
3. Kisil V.V. Induced representations and hypercomplex numbers // arXiv:09.09.4464v6 [math.RT] 4 Feb 2013. URL: <https://arxiv.org/pdf/0909.4464>.
4. Котельников А.П. Теория векторов и комплексные числа (Начала механики в неевклидовом пространстве). / Сб. «Некоторые приложения идей Лобачевского в механике и физике». М.: Гостехиздат, 1950. С. 7-47.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 330 с.
7. Harkin A.A., Harkin J.B. Geometry of generalized complex numbers. Math. Mag. 2004. № 77(2). P. 118-129. DOI: 10.1080/0025570X.2004.11953236.
8. Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Двойные числа. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2010. Т. 7. № 1(13). С. 16-25.
9. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1(1). С. 111-127.
10. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. Киев: Сталь, 2016. 316 с.
11. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Кватернионы в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
12. Ефремов А.П. Механика Ньютона в кватернионном базисе. / Препринт. М.: Межотраслевой науч.-техн. центр венчурных нетрадиционных технологий, 1995. 49 с.
13. Терехов С.В. Нужно ли использовать кватернионы в физике? // Физика и техника высоких давлений. 2022. Т. 32. № 1. С. 62-77.
14. Терехов С.В. Применение парафункций для описания явлений и процессов в синергетической системе // Вестник СарГТУ. 2023. № 4(99). С. 38-51.
15. Терехов С.В. Генерация алгебр пространств Евклида и специальной теории относительности. // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. 2005. № 1. С. 163-174.

16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
17. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966. 252 с.
18. Крылов В.М., Яшкин С.Н. Кватернионы и их использование в теории вращений пространств // Известия высших учебных заведений. Раздел геодезия и аэрофотосъемка. 2016. № 6. С. 3–6.
19. Велиева Т.Р., Геворкян М.Н., Демидова А.В., Королькова А.В., Кулябов Д.С. Аппарат геометрической алгебры и кватернионов в системах символьных вычислений для описания вращений в евклидовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 1. С. 31–42.
20. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 930 с.
21. Жирнов Н.И. Классическая механика. М.: Просвещение. 1980. 303 с.
22. Терехов С.В. Физико-геометрические характеристики гиперпространства. IV. Солитон Хасимото. Механическое движение целлы. // Физика и техника высоких давлений. 2016. Т. 26. № 3–4. С. 129–140.
23. Терехов С.В. Физико-геометрические характеристики гиперпространства. V. Поле гипердвойных кватернионов. // Физика и техника высоких давлений. 2017. Т. 27. № 3. С. 69–79