УДК 517.956.6

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Сопуев Адахимжан, д.ф.-м.н., профессор,
sopuev@mail.ru
Нуранов Бактыбек Шермаматович, ст. преп.,
nuranov2014@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач для уравнения третьего порядка, когда смешанный параболо-гиперболический оператор с линией сопряжения* $x=0$ *применяется к дифференциальному оператору первого порядка по y. Методом понижения порядка уравнения рассматриваемая задача сводится к краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка в прямоугольнике, разрешимость которого сводится к решению интегрального уравнения Вольтера второго рода с непрерывным ядром, имеющее единственное решение. После определения следа функции и её производной по x на линии изменения типа уравнений, решение задачи определяется как решение смешанной задачи для параболического уравнения при x>0 и как решение задачи Гурса для гиперболического уравнения при x<0.*

Ключевые слова: *краевые задачи, линия сопряжения, условия склеивания, смешанный параболо-гиперболический оператор, методы Римана и интегральных уравнений.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ ПАРАБОЛА–ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ

Сопуев Адахимжан, профессор, ф.-м.и.д.,
sopuev@mail.ru
Нуранов Бактыбек Шермаматович, улук окутуучу
nuranov2014@mail.ru
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Жалгашуу сызыгы x=0 болгон аралаш парабола-гиперболалык оператор биринчи тартиптеги y боюнча алынган дифференциалдык операторго колдонулган учурдагы үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн чек аралык маселелердин* *чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү методу менен каралып жаткан маселе тик бурчтукта экинчи тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселеге келтирилет, анын чечилиши үзгүлтүксүз ядролуу жалгыз чечимге ээ болгон экинчи түрдөгү Вольтердин интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинет. Теңдемелердин түрүнүн өзгөрүү сызыгында функциянын изи жана анын x ке карата туундусу аныкталгандан кийин маселенин чечими x>0 болгондо параболалык теңдеме үчүн аралаш маселенин чечими катары, ал эми x<0 болгондо гиперболалык теңдеме үчүн Гурстун маселесинин чечими катары аныкталат.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, жалгаштыруу шарттары, аралаш парабола-гиперболалык операторлор, Риман жана интегралдык теңдемелер методдору.*

ON THE BOUNDARY PROBLEM FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

Sopuev Adakhimzhan,
Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
sopuev@mail.ru
Nuranov Baktybek Shermamatovich, senior teacher,
nuranov2014@mail.ru
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *Existence and uniqueness theorems for solutions to boundary value problems for a third-order equation are proved when a mixed parabolic-hyperbolic operator with a conjugation line is applied to a first-order differential operator in y. By lowering the order of the equation, the problem under consideration is reduced to a boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation of the second order in a rectangle, the solvability of which is reduced to solving a Voltaire integral equation of the second kind with a continuous kernel, which has a unique solution. After determining the trace of the function and its derivative with respect to x on the line of change in the type of equations, the solution of the problem is defined as the solution of the mixed problem for the parabolic equation for x>0 and as the solution of the Goursat problem for the hyperbolic equation for x<0.*

Key words: *boundary value problems, conjugation line, gluing conditions, mixed parabolic-hyperbolic operator, Riemann methods and integral equations.*

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $D=\{(x,y): -\ell_1<x<\ell,\ 0<y<h\}$ $(\ell,\ \ell_1,\ h>0)$ рассмотрим уравнение

$$L_1L_2u=0, \qquad (1)$$

где $L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}, \ x > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c, \ x < 0, \end{cases}$, $\qquad L_2 \equiv \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\qquad c$ – заданная константа.

Пусть $D_1 = D \cap (x > 0), \ D_2 = D \cap (x < 0)$, а C^{n+m} означает класс функций, имеющих непрерывные все производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r = 0,1,...,n; \ s = 0,1,...,m\right)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующие условия:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)]$;

2) является решением уравнения (1) при $x \neq 0$;

3) удовлетворяет краевые условия

$$u\big|_{x=\ell} = \varphi_1(y), \ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u\big|_{y=0} = \psi_1(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{3}$$

$$u_y\big|_{y=0} = \psi_2(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

$$u\big|_{y=0} = \chi_1(x), \ -\ell_1 \le x \le 0, \tag{5}$$

$$u_y\big|_{y=0} = \chi_2(x), \ -\ell_1 \le x \le 0, \tag{6}$$

где $\varphi_1(y), \psi_i(y), \chi_i(y) (i = 1,2)$ – заданные функции, причем

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y) \in C^1[0, h], \psi_1(x) \in C^1[0, \ell], \ \chi_1(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \\ &\psi_2(x) \in C^1[0, \ell], \ \chi_2(x) \in C^1[-\ell_1, 0], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(0) = \psi_1(\ell), \varphi_1'(0) = \psi_2(\ell), \psi_1(0) = \chi_1(0), \psi_1'(0) = \chi_1'(0), \\ &\psi_2(0) = \chi_2(0), \psi_2'(0) = \chi_2'(0). \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что краевые задачи для уравнений смешанного второго, третьего и четвертого порядков изучены в работах [1 – 5]. Краевые задачи для уравнения (1) с линией сопряжения $y=0$ изучены в работах [6, 7].

Из постановки задачи 1 вытекают следующие условия склеивания:

$$u(-0,y)=u(+0,y), u_x(-0,y)=u_x(+0,y), 0\le y\le h. \tag{9}$$

Введем новую функцию:

$$\upsilon(x,y)=u_y(x,y) \tag{10}$$

Тогда из уравнения (1) имеем

$$\upsilon_{xx}-\upsilon_y=0, (x,y)\in D_1, \tag{11}$$

$$\upsilon_{xy}+c\upsilon=0, (x,y)\in D_2, \tag{12}$$

Из условия склеивания (9) получим

$$\begin{aligned} &\upsilon(-0,y)=\upsilon(+0,y)=\tau(y), 0\le y\le h,\\ &\upsilon_x(-0,y)=\upsilon_x(+0,y)=\nu(y),\ 0\le y\le h, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\tau(y),\nu(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

2. Соотношения, полученные из областей D_1 и D_2. Устремляя x к -0 из уравнения (12) с учетом (13) имеем соотношение между $\tau(y)$ и $\nu(y)$, полученное из области D_2 в виде:

$$\nu'(y)+c\tau(y)=0, 0\le y\le h. \tag{14}$$

Известно, что решение первой краевой задачи для уравнения (11) в области D_1 представимо в виде [8]:

$$\begin{aligned} \upsilon(x,y)=&\int_0^{\ell}G(x,y;\xi,0)\psi_2(\xi)\,d\xi-\int_0^{y}G(x,y;0,\eta)\nu(\eta)\,d\eta-\\ &-\int_0^{y}G_{\xi}(x,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta, \end{aligned} \tag{15}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина, представимая в виде

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(x-\xi+4n\ell\right)^2}{4(y-\eta)}\right)+\exp\left(-\frac{\left(x+\xi+4n\ell\right)^2}{4(y-\eta)}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{\left(x-\xi+4n\ell+2\ell\right)^2}{4(y-\eta)}\right)-\exp\left(-\frac{\left(x+\xi+4n\ell+2\ell\right)^2}{4(y-\eta)}\right)\right].$$

Не трудно заметить, что

$$G(0,y;0,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+g(y,\eta), \tag{16}$$

где

$$g(y,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\exp\left(-\frac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\ell^2}{2(y-\eta)}\right).$$

Устремляя $x\to+0$, из (15) с учетом условий (13) и (16), имеем следующее соотношение, полученное из области D_1:

$$\tau(y)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\nu(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta-\int_0^y g(y,\eta)\nu(\eta)\,d\eta+\Phi_1(y), \tag{17}$$

где $\Phi_1(y)=-\int_0^y G_\xi(0,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta+\int_0^\ell G(0,y;\xi,0)\psi_2(\xi)\,d\xi.$

3. Сведение задачи к решению интегрального уравнения. Исключая из соотношений (14) и (17) функцию $\tau(y)$, имеем:

$$\nu'(y)=\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\nu(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta+c\int_0^y g(y,\eta)\nu(\eta)\,d\eta-c\Phi_1(y),0,\ 0\le y\le h. \tag{18}$$

Далее, интегрируя уравнение (18) по y в пределах от 0 до y, получим интегральное уравнение Вольтера второго рода

$$\nu(y)=\int_0^y K(y,\eta)\nu(\eta)\,d\eta+\Phi(y), \tag{19}$$

где $K(x,\xi)=\dfrac{2c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{y-\eta}+c\int\limits_{\eta}^{y}g(t,\eta)\,d\eta,\quad \Phi(y)=\psi_2'(0)-c\int\limits_{0}^{y}\Phi_1(t)dt$.

Интегральное уравнение (19) с непрерывным ядром $K(x,\xi)$ допускает единственное решение [9].

После определения $\nu(y)$ из (19), найдем $\tau(y)$ из соотношения (17). Таким образом, искомая функция $\upsilon(x,y)$ в области D_1 определяется по формуле (15), а в области D_2 функцию $\upsilon(x,y)$ определим как решение задачи Гурса для уравнения (12) [10].

4. Построение решения задачи 1 в областях D_1 и D_2. После нахождения функции $\upsilon(x,y)$ для определения решения задачи 1 придём к следующей задаче: найти в области D решение уравнения

$$u_y(x,y)=\upsilon(x,y),$$

удовлетворяющее краевое условие (3) и (5).

Решение этой задачи имеет вид:

$$u(x,y)=\begin{cases}\psi_1(x)+\int\limits_0^y\upsilon(x,\eta)\,d\eta,\ (x,y)\in D_1,\\ \chi_1(x)+\int\limits_0^y\upsilon(x,\eta)\,d\eta,\ (x,y)\in D_2.\end{cases}\qquad(20)$$

Из (20) не трудно проверить выполнение условия сопряжения (9).

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (5) и (9), тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Аналогично исследуется

Задача 2. Найти функцию $u(x,y),$ удовлетворяющее всем условиям задачи 1, если вместо условия (2) берется условие

$$u_x\Big|_{x=\ell}=\varphi(y),\ 0\le y\le h.$$

Литература

1. ***Джураев, Т. Д.*** Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. ***Джураев, Т. Д.*** Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. ***Джураев, Т. Д***. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
4. ***Бобылёва, Л. А.*** Об одной краевой задаче для уравнений смешанно-составного типа четвёртого порядка [Текст] / Л.А. Бобылёва, М.М. Смирнов // Известия Вузов, Математик. – 1972. – №5 (120). – С. 15 – 11.
5. ***Смирнов, М. М.*** Краевая задача со смещением для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка [Текст] / М.М. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. №9. – С. 1678-1686.
6. ***Сопуев, А.*** Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка [Текст] / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник ОшГУ. – 2021. – Т. 3. – №1. – С. 93-101.
7. ***Сопуев, А.*** О краевых задачах для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с младшими членами [Текст] / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник ОшГУ. – 2022. – №1. – С. 149-158.
8. ***Полянин, А. Д***. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
9. ***Краснов, М. Л.*** Интегральные уравнения. Введение в теорию [Текст] / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
10. ***Соболев, С. Л.*** Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966. – 444 с.