МАТЕМАТИКА

УДК 917.528

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮНҮН КЭЭ БИР ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ

Акматов Абдилазиз Алиевич,
улук окутуучу,
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Жумушта чыныгы сан огунда сингулярдык козголууга ээ болгон маселенин чечими дал келүүчү козголбогон маселенин чечимине умтулуусу көрсөтүлөт. Чечимди чыныгы окто баалоо мүмкүнчүлүгү сызыктуу эмес маселенин эсебинен келип чыгат. Туруктуу аралыктарды аныктоочу функциянын табиятына жараша сингулярдык козголгон сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеменин чечими изилденүүчү аралыктар өзгөрөт. Ал жерде туруктуулук шартынын узартылышын мүнөздөөчү аралык жана эки жактуу туруктуу аралыктар пайда болот. Ошону менен бирге баштапкы чекитти тандоо менен сызыктуу эмес сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимин изилдөөчү туруктуу аралыктар жоюлуп кеткен учурда кездешет.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу козголуу, кичине параметр, асимптотика, туруктуулук, чечим, баштапкы шарт, ажыралма.*

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

Акматов Аблизазиз Алиевич
старший преподаватель,
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В работе показано, что решения сингулярно возмущенной задачи стремится в действительной области к решениям соответствующей невозмущенной задачи. Оценка в действительной области производится из-за нелинейности* *рассматриваемой задачи. В зависимости от природы функции, определяющей условия устойчивости, изменяются рассматриваемые области сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Здесь появятся области, выражающие затягивание потери устойчивости и двухсторонне устойчивости. А также в зависимости от выбора начальной точки исключается устойчивая область. В результате мы не получаем устойчивые области.*

Ключевые слова: *сингулярные возмущения, малый параметр, асимптотика, устойчивость, решения, начальные условия, разложения.*

SOME FEATURES OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED PROBLEM

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer,
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The paper shows that the solution of the singularly perturbed problem tends in the real region to the solutions of the corresponding unperturbed problem.Estimation in the real region is performed due to the nonlinerity of the considered problem. Depending on the natura of the function that determines the stability conditions, the considered areas of singularly perturbed differential equations cnange. Here will the areas expressing the tightening of the buckling and the twosided stability. And also depending on the choice of the starting point, a stable region is excluded. As a result, we do not get a stable area.*

Keywords: *singular perturbations, small parameter, asymptotic, stability, solutions, initial, conditions, expansions*

Киришүү. Жумушта $a(t)$ функциясынын табиятына жараша келип чыгуучу туруктуулуктун узартылышы, эки жактуу туруктуу аралыктардын пайда болуусун өзгөчөлүк [1] катары кабыл алабыз. Чечим чыныгы сандар талаасында изилденет.

Маселенин коюлушу. Төмөнкү

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon x^2(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \quad \left|x^0\right| = O(\varepsilon), \qquad (2)$$

мында $0<\varepsilon<1$ - кичине параметр, $x(t,\varepsilon)$ - изделүүчү белгисиз функция.

Козголбогон

$$a(t)\xi(t)=0, \qquad (3)$$

теңдеменин чечими төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\xi(t)=0. \qquad (4)$$

(1)-(2) маселени экививаленттүү интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)x^2(\tau,\varepsilon)d\tau. \qquad (5)$$

(5) теңдемени удаалаш жакындашуу усулу менен чечебиз. Удаалаш жакындашууну төмөнкүчө аныктайбыз:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)x_{m-1}^2(\tau,\varepsilon)d\tau, \qquad (6)$$

мында $m\in N$.

Өзгөчөлүктү көрсөтүү үчүн конкреттүү $a(t)=t^3-t+i(2t^2-1)$ функциясын алалы. Анда бул функциянын чыныгы бөлүгүнүн туруктуу, туруксуз жана туруктуулук шарттарынын бузулуу чекиттерин аныктоо максатында анын чыныгы бөлүгүн теңдеме катары чечип алалы:

$\operatorname{Re}a(t)=0$ же $t^3-t=0$ болуп, чечимдери $t_1=-1$, $t_2=0$ жана $t_3=1$. Туруктуу аралыктары $t\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$, туруксуз аралыктары $t\in(-1;0)\cup(1,+\infty)$, туруктуулуктан туруксуздукка өтүү чекити $t_1=-1$, туруксуздуктан туруктуулукка өтүү чекити $t_2=0$ болуп саналат.

(1)-(2) маселенин чечими изилденүүчү аралыктарды аныктоо максатында $a(t)$ функциясынын интегралдайбыз:

$$F(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}a(s)ds=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+i\left(\frac{2}{3}t^3-t\right)-\left(\frac{t_0^4}{4}-\frac{t_0^2}{2}\right)-i\left(\frac{2}{3}t_0^3-t_0\right).$$

Чыныгы бөлүгү бөлүп алсак, анда $\operatorname{Re} F(t,t_0)=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-\frac{t_0^4}{4}+\frac{t_0^2}{2}$ Теңдеме катары чечип

$t_1=-t_0$, $t_2=-\sqrt{2-t_0^2}$, $t_3=\sqrt{2-t_0^2}$, $t_4=t_0$ алабыз.

1). $t_0=-\sqrt{2}$ болсун. Анда $t\in\left[-\sqrt{2};0\right]$ жана $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ аралыктары туруктуу, $t\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ аралыктары туруксуз аралык болушат. Изилдөөнү $t\in\left[-\sqrt{2};0\right]$ аралыгында жүргүзөлү:

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{t^4-2t^2-t_0^4+2t_0^2}{4\varepsilon}+i\left(\frac{2}{3}t^3-t-\frac{2}{3}t_0^3+t_0\right)\right),$$

$$x_2(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{t^4-2t^2-\tau^4+2\tau^2}{4\varepsilon}+i\left(\frac{2}{3}t^3-t-\frac{2}{3}\tau^3+\tau\right)\right)\right)x_1^2(\tau,\varepsilon)d\tau\ ,$$

$$x_m(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{4\varepsilon}\left(t^4-2t^2-\tau^4+2\tau^2\right)+i\left(\frac{2}{3}t^3-t-\frac{2}{3}\tau^3+\tau\right)\right)x_{m-1}^2(\tau,\varepsilon)d\tau\ ,$$

мында $m\in N$.

Баалоону жүргүзөлү

$$\left|x_1(t,\varepsilon)\right|\le\left|x^0\right|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)=O(\varepsilon)\,,$$

$$\left|x_2(t,\varepsilon)\right|\le\left|x^0\right|\exp\left(\frac{t^4-2t^2}{4\varepsilon}\right)+\left|x^0\right|^2\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^4-2t^2+\tau^4-2\tau^2}{4\varepsilon}\right)d\tau=O(\varepsilon)\,.$$

Демек, каалагандай жакындашуу үчүн

$$\left|x_m(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon+\left(C\varepsilon\right)^2+\ldots+\left(C\varepsilon\right)^m=C\varepsilon\left(1+C\varepsilon+\ldots+\left(C\varepsilon\right)^{m-1}\right)=C\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\,,$$

мында $\alpha_m(\varepsilon)$ туюнтмасы чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия болгондуктан $t\in\left[-\sqrt{2};\delta(\varepsilon)\right]$, ($\delta(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$) аралыгында (1)-(2) маселенин чечими үчүн

$$\left|x(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon\,, \tag{7}$$

$C-const$ баалоосу орун алат.

2). $t_0=\pm 1$ болсун. Анда (1)-(2) маселенин чечими изилденүүчү туруктуу аралык пайда болбойт. Тактап айтканда бардык сан огу туруксуз аралыкка айланат. Себеби $\operatorname{Re} F(t,t_0)=\frac{(t^2-1)^2}{4\varepsilon}$ функциясы сан огунда терс маани кабыл албайт.

3). $t_0 = 0$ болсун. Бул учурда баштапкы чекит туруксуз аралыктан туруктуу аралыкка өткөн чекитте берилип жатат. Жыйынтыгында баштапкы чекиттин жайгашуу абалына карата эки жактан туруктуу болгон аралыктар келип чыгат. Ал аралыктардын ар биринде $a(t)$ функциясы өзүнүн маанисин ондон терске өзгөртүп туруктуулуктун алмашуу шарты орун алат. Мында оң багытта жаткан аралыкта чечимди изилдейли. Анда кайрадан эле (5) теңдемени чечүүнү (6) барабардыкты колдонуп аткарабыз. Эсептөөдө (7) баалоо аналогиялуу түрдө орун алат.

Эгерде $t_0 = 0$ чекитинен солго карай аныкталган аралык боюнча жүрсөк да (7) баалоо орун алат. Демек, жалпысынан эки жактуу туруктуу болгон аралыкты кошуп $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ аралыгында (7) баалоо орун алат деп айтууга негиз бар.

4). Баштапкы чекит $t_0 \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ аралыгында $t_0 \ne \pm\sqrt{2}$, $t_0 \ne \pm 1$ жана $t_0 \ne 0$ чекиттеринен башка аралыктагы чекиттерде жатса, анда кадимдидей эле туруктуу аралыктар жашап ал аралыктар үчүн (7) баалоо орун аларын көрсөтүүгө болот.

5). Эгерде баштапкы чекит $\sqrt{2 - t_0^2}$ туюнтмасы жорума боло турган, тактап айтканда $t_0 \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ аралыктарында жатса анда (1)-(2) маселенин чечими каралуучу аралыкта $a(t)$ функциясы бир канча жолу туруктуулук шартын алмаштырат. Бул учурда туруктуулуктун узартылышы орун алат. Баалоо (7) баалоого аналогия болуп, чыныгы сан огунда орун алат.

Корутунду. Каралуучу мисалдын изилдөөсүнө таянуу менен $a(t)$ функциясына карата (1)-(2) маселенин чечими изилденүүчү ар түрдүү аралыктар келип чыгат деген жыйынтыкка келебиз. Ошону менен бирге чечим козголбогон (3) теңдеменин чечими (4) умтулары келип чыгат.

Адабияттар

1. ***Акматов, А. А.*** Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости / Вестник ОшГУ. – Ош. – 2008. - №5. – С. 79-82.
2. ***Alymkulov, K.*** A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. - Moscow, 2012. - № 6. - Pp. 117-121.
3. ***Alymkulov, K.*** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) - 2015. - Volume 3. - Pp. 54-64.