УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Халматов Анвар Авазович, к.ф.-м.н., доцент, haa83@mail.ru
Каландарова Зилола, магистрант, zkalandarova_mag@gmail.com
Кыргызско-Узбекского Международного университети
имена Б.Сыдыкова,
Каныбек кызы Гулнур, магистрант, kanybekkyzyg@gmail.com
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Предметом исследования является неоднородное, линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными. Целью исследования является нахождение решения удовлетворяющих как начальным, так и однородным краевым условиям первого рода. Интегральные, интегро-дифференциальные уравнения можно встретить во всех областях науки, например уравнение переноса, возникающее в процессах замедления нейтронов, играющее большую роль в современной физике. Мы знаем, что колебания тонкой проволоки можно выразить отдельными дифференциальными уравнениями второго порядка. Если вместо проволоки рассматривать тонкую сплошную балку (тонкий молоток), то процесс ее колебаний выражается дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Такие проблемы возникают при проектировании тяжелой техники. Для построения решения была применена формула Дирихле для двойного интеграла, вследствие которого получаются интегральные уравнения Вольтерра с тремя неизвестными. Формула Дирихле была использована для решения задачи Абеля. В заключении была доказана основная теорема о существовании решения обратной задачи, удовлетворяющих выше указанным условиям.*

Ключевые слова. *Сингулярно возмущенный, слабо возмущенный, точка поворта.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО ЖӨНҮНДӨГҮ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Халматов Анвар Авазович, ф.-м.и.к., доцент, haa83@mail.ru
Каландарова Зилола, магистрант, zkalandarova_mag@gmail.com

Б.Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек эл аралык университети,
Каныбек кызы Гулнур, магистрант, kanybekkyzyg@gmail.com
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Изилдөөнүн предмети болуп бир тектүү эмес сызыктуу жекече туундулуу эки көз карандысыз өзгөрмөлүү төртүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме болуп саналат. Изилдөөнүн максаты биринчи түрдөгү баштапкы жана бир тектүү чек ара шарттарын канааттандырган чечимди табуу болуп саналат. Интегралдык, интегродифференциалдык теңдемелерди илимдин бардык тармактарында кездештирүүгө болот, мисалы, азыркы физикада маанилүү роль ойногон нейтрондордун жайлоо процесстеринде пайда болгон өткөрүп берүү теңдемеси катары. Биз ичке зымдын термелүүсүн өзүнчө экинчи даражадагы дифференциалдык теңдемелер менен туюнтса болорун билебиз. Эгерде зымдын ордуна ичке катуу нурду (ичке балка) карасак, анда анын термелүү процесси төртүнчү даражадагы дифференциалдык теңдемелер менен туюнтулат. Мындай көйгөйлөр оор техниканы долбоорлоодо келип чыгат. Чечимди куруу үчүн кош интеграл үчүн Дирихле формуласы колдонулуп, анын натыйжасында үч белгисиз Вольтерра интегралдык теңдемелери алынган. Абел маселесин чечүү үчүн Дирихле формуласы колдонулган. Жыйынтыктап айтканда, тескери маселенин жогорудагы шарттарды канааттандырган чечиминин бар экендиги жөнүндө негизги теорема далилденди.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу козголгон, алсыз козголгон, өзгөчө чекит, асимптотика*.

INVERSE PROBLEM OF FINDINING THE RIGHT-HAND SIDE OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN FOURTH-ORDER

Khalmatov Anvar Avazovich, haa83@mail.ru
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Kalandarova Zilola, masters student, zkalandarova_mag@gmail.com
Kyrgyz-Uzbek international university named after B. Sydykova,
Kanybek kyzy Gulnur, masters student, kanybekkyzyg@gmail.com
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The subject of the research is an inhomogeneous, linear fourth-order partial differential equation with two independent variables. The aim of the research is to find a solution that satisfies both the initial and homogeneous boundary conditions of the first kind. Integral, integro-differential equations can be found in all areas of science, for example, the transfer equation that arises in the processes of slowing down neutrons, which plays an important role in modern physics. We know that the oscillations of a thin wire can be* *expressed by separate second-order differential equations. If, instead of a wire, we consider a thin solid beam (thin hammer), then the process of its oscillations is expressed by fourth-order differential equations. Such problems arise in the design of heavy equipment. To construct a solution, the Dirichlet formula for the double integral was applied, as a result of which the Volterra integral equations with three unknowns are obtained. The Dirichlet formula was used to solve the Abel problem. In conclusion, the main theorem was proved on the existence of a solution to the inverse problem that satisfies the above conditions.*

Key words*. Singularly perturbed, weakly indignant, turning point.*

Введение. Теория обратных задач – бурно развивающееся направление современной математической физики и ее прикладных областей. В.Гейзенберг, один из основоположников квантовой механики, в своей книге «Физика и философия» высказал мнение, что основное уравнение материи, рассматриваемое как математическая модель всей материи, представляет собой сложную систему интегральных уравнений.

В целом обратные задачи играют важную роль в процессе познания явлений природы, аппарат интегральных уравнений широко используется в физике, механике, теории управления и прикладной математике.

Постановка задачи. Исследуем обратную задачу

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a_2(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + a_3(t,x)u(t,x) = \varphi(t) f(t,x) + F(t,x),\ (t,x)\in\Omega \tag{1}$$

$$u(0,x)=\psi_1(x),\ u_t(0,x)=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u(t,0)=0,\ u(t,1)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u(t,x_0)=g(t),\quad t\in[0,T],\ x_0\in(0,1), \tag{4}$$

где $0<T,\ 0<a_1$, x_0 – известные постоянные числа, $a_2(t,x)$, $a_3(t,x)$, $f(t,x)$, $F(t,x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $g(t)$ – известные функций, $a_2,\ a_3,\ f,F\in C(\Omega),\ \psi_1,\psi_2\in \mathrm{C}^2[0,1],\ g\in C^2[0,T], \psi_1(0)=\psi_1(1)=0, g(0)=\psi_1(x_0),$ $g'(0)=\psi_2(x_0)$; а $\varphi(t)$ и $u(t,x)$ – неизвестные (искомые) функций, $\Omega=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$.

Как нам известно, (1) – неоднородное, линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с двумя независимыми переменными; (2) – начальные уловия; (3) – однородные краевые условия первого рода;

(4) – дополнительная информация, т.е. след искомой функций $u(t,x)$ на отрезке $x = x_0$, $t \in [0,T]$.

Требуется найти функций $u \in C^{2,2}(\bar{\Omega})$ и $\varphi \in \mathrm{C}[0,\mathrm{T}]$ удовлетворяющие уравнению (1) и условиям (2)-(4).

Основной результат. Для начала введем обозначение

$$v(t,x) = u_{tt}(t,x), \tag{5}$$

где $v(t,x)$ – новая неизвестная функция.

Дважды интегрируя равенство (5) по переменной t от 0 до t и учитывая условию (2), имеем:

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^\tau v(s,x) ds d\tau + \psi_2(x)t + \psi_1(x).$$

Если применять формулу Дирихле для двухкратного интеграла

$$\int_0^t \int_0^\tau v(s,x) ds d\tau = \int_0^t \int_s^t v(s,x) d\tau ds = \int_0^t v(s,x) ds \int_s^t d\tau = \int_0^t (t-s) v(s,x) ds,$$

то последнее равенство можно записать в виде:

$$u(t,x) = \int_0^t (t-s) v(s,x) ds + \psi_2(x)t + \psi_1(x). \tag{6}$$

Дифференцируя равенство (6) по переменной x имеем:

$$u_x = \int_0^t (t-s) v_x(s,x) ds + \psi'_2(x)t + \psi'_1(x), \tag{7}$$

$$u_{xx} = \int_0^t (t-s) v_{xx}(s,x) ds + \psi''_2(x)t + \psi''_1(x). \tag{8}$$

Учитывая равенств (5)-(8), уравнение (1) можно записать в виде:

$$v_{xx}(t,x)-v(t,x)-a_1^2\left(\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds+\psi''_2(x)t+\psi''_1(x)\right)+$$

$$+a_2(t,x)\left(\int_0^t (t-s)v_x(s,x)ds+\psi'_2(x)t+\psi'_1(x)\right)+$$

$$+a_3(t,x)\left(\int_0^t (t-s)v(s,x)ds+\psi_2(x)t+\psi_1(x)\right)=\varphi(t)f(t,x)+F(t,x).$$

или

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}=a_1^2\int_0^t (t-s)\frac{\partial^2 v(s,x)}{\partial x^2}ds+\Phi. \tag{9}$$

где

$$\Phi\equiv -a_2(t,x)\int_0^t (t-s)\frac{\partial v(s,x)}{\partial x}ds-a_3(t,x)\int_0^t (t-s)v(s,x)ds+\varphi(t)f(t,x)+v(t,x)+F_1(t,x)$$

$$F_1(t,x)=a_1^2\left(\psi''_2(x)t+\psi''_1(x)\right)-a_2(t,x)\left(\psi'_2(x)t+\psi'_1(x)\right)-$$

$$-a_3(t,x)\left(\psi_2(x)t+\psi_1(x)\right)-F(t,x).$$

1-лемма. Функция $R(t,s)=a_1 sh\left(a_1(t-s)\right),\ (t,s)\in\Omega$ является резольвентой ядра $K(t,s)=a_1^2(t-s)$.

Доказательство. Для доказательство леммы достаточно доказать справедливости равенства

$$R(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s),\,(t,s)\in\Omega.$$

Перепишем правую часть последнего равенства:

$$\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s)=\int_s^t a_1^2(t-\tau)a_1 sh\left(a_1(\tau-s)\right)d\tau+a_1^2(t-s)=$$

$$=-a_1^2(t-s)ch(0)+a_1 sh\left(a_1(\tau-s)\right)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}+a_1^2(t-s)=a_1 sh\left(a_1(t-s)\right)=R(t,s).$$

Лемма 1 доказана.

Применяя лемму 1 для равенства (9) имеем:

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}=\int_0^t R(t,\tau)\Phi d\tau+\Phi$$

или

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}-v(t,x)=-\int_0^t R(t,\tau)\Bigg(a_2(\tau,x)\int_0^\tau(\tau-s)v_x(s,x)ds+a_3(\tau,x)\int_0^\tau(\tau-s)v(s,x)ds+$$

$$+\varphi(\tau)f(\tau,x)-v(\tau,x)\Bigg)d\tau-$$

$$-a_2(t,x)\int_0^t(t-s)v_x(s,x)ds-a_3(t,x)\int_0^t(t-s)v(s,x)ds-\varphi(t)f(t,x)+F_2(t,x),\quad(10)$$

где $R(t,s)=a_1 sh\big(a_1(t-s)\big),\ (t,s)\in\Omega,\ F_2(t,x)=\int_0^t R(t,\tau)F_1(\tau,x)d\tau+F_1(t,x).$

Из краевого условия (3) и обозначеия (5) имеем:

$$v(t,0)=v(t,1)=0,\quad 0\le t\le T.\qquad(11)$$

Лемма 2. Решение краевой задачи

$$y''(x)–y(x)=f(x),\ 0<x<1,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0.$$

представимо в виде:

$$y(x)=\frac{1}{sh1}\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

где $G(x,\xi)=\begin{cases}sh(x-1)sh(\xi), & 0\le\xi\le x\le 1,\\ sh(x)sh(\xi-1), & 0\le x\le\xi\le 1.\end{cases}$

Применяя лемму 2 к задаче (10)-(11) имеем:

$$v(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\Bigg(\int_0^t R(t,\tau)\Bigg(a_2(\tau,\xi)\int_0^\tau(\tau-s)v_\xi(s,\xi)ds+a_3(\tau,\xi)\int_0^\tau(\tau-s)v(s,\xi)ds+$$

$$+\varphi(\tau)f(\tau,x)-v(\tau,x)\Bigg)d\tau+a_2(t,\xi)\int_0^t(t-s)v_\xi(s,\xi)ds+$$

$$+a_3(t,\xi)\int_0^t(t-s)v(s,\xi)ds+\varphi(t)f(t,\xi)+F_2(t,\xi)\Bigg)d\xi.\qquad(12)$$

Равенство (12) перепишем в виде:

$$v(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\left(\int_0^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)\int_0^\tau(\tau-s)v_\xi(s,\xi)dsd\tau+\right.$$

$$\int_0^t R(t,\tau)a_3(\tau,\xi)\int_0^\tau(\tau-s)v(s,\xi)dsd\tau+\int_0^t R(t,\tau)\varphi(\tau)f(\tau,x)d\tau-\int_0^t R(t,\tau)v(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau+$$

$$\left.+a_2(t,\xi)\int_0^t(t-s)v_\xi(\mathrm{s},\xi)ds+a_3(t,\xi)\int_0^t(t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\varphi(t)f(t,\xi)+F_2(t,\xi)\right)d\xi,$$

применяя здесь формулу Дирихле, получаем:

$$v(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\left(\int_0^t\int_\tau^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)(\tau-s)d\tau v_\xi(s,\xi)ds+\right.$$

$$\int_0^t\int_\tau^t R(t,\tau)a_3(\tau,\xi)(\tau-s)d\tau v(s,\xi)ds-\int_0^t R(t,\tau)v(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau+a_2(t,\xi)\int_0^t(t-s)v_\xi(\mathrm{s},\xi)ds+$$

$$\left.+a_3(t,\xi)\int_0^t(t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\varphi(t)f(t,\xi)+F_2(t,\xi)\right)d\xi. \tag{13}$$

Введем обозначения:

$$K_1(t,x,\xi,\mathrm{s})=G(x,\xi)a_2(t,\xi)(t-s)+\int_\tau^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)(\tau-s)d\tau,$$

$$K_2(t,x,\xi,\mathrm{s})=G(x,\xi)\left(a_3(t,\xi)(t-s)-\int_s^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)(\tau-s)d\tau\right),$$

$$m(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(t,\xi)d\xi,\quad F_3(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_2(t,\xi)d\xi,$$

тогда (13) примет вид:

$$v(t,x)=\int_0^t\int_0^1\left(K_1(t,x,\xi,s)v_\xi(s,\xi)+K_2(t,x,\xi,s)v(s,\xi)\right)d\xi ds+m(t,x)\varphi(t)+$$
$$+\int_0^t R(t,s)m(s,x)\varphi(s)ds+F_3(t,x). \tag{14}$$

При $x=x_0$ из равенства (14) имеем:

$$v(t,x_0)=\int_0^t\int_0^1\left(K_1(t,x_0,\xi,s)v_\xi(s,\xi)+K_2(t,x_0,\xi,s)v(s,\xi)\right)d\xi ds+m(t,x_0)\varphi(t)+$$
$$+\int_0^t R(t,s)m(s,x_0)\varphi(s)ds+F_3(t,x_0),$$

или

$$m(t,x_0)\varphi(t)+\int_0^t R(t,s)m(s,x_0)\varphi(s)ds=$$
$$=g''(t)-\int_0^t\int_0^1\left(K_1(t,x_0,\xi,s)v_\xi(s,\xi)+K_2(t,x_0,\xi,s)v(s,\xi)\right)d\xi ds-F_3(t,x_0). \tag{15}$$

Дифференцируя равенство (14) по переменной x имеем:

$$v_x(t,x)=\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial K_1(t,x,\xi,s)}{\partial x}v_\xi(s,\xi)+\frac{\partial K_2(t,x,\xi,s)}{\partial x}v(s,\xi)\right)d\xi ds+$$
$$+m_x(t,x)\varphi(t)+\int_0^t R(t,s)m_x(s,x)\varphi(s)ds+\frac{\partial F_3(t,x)}{\partial x}. \tag{16}$$

В результате мы получили три линейные интегральные уравнения Вольтерра (14), (15) и (16) с тремя неизвестными: $\varphi(t), v(t,x), v_x(t,x)$.

Теорема. Пусть выполняется неравенство

$$m(t,x_0)=\int_0^1 G(x_0,\xi)f(t,\xi)d\xi\neq 0,\ \forall t\in[0,T]. \tag{17}$$

Тогда решение системы (14), (15), (16) в пространстве $C^{2,2}(\Omega)\times C[0,T]$ существует и единственно.

Действительно, запишем эти уравнения в виде:

$$\begin{cases} v(t,x)=A_1[v,v_x,\varphi]+m(t,x)\varphi(t)+F_3(t,x),\\ \varphi(t)=A_2[v,v_x,\varphi]+\dfrac{g''(t)-F_3(t,x_0)}{m(t,x_0)},\\ v_x(t,x)=A_3[v,v_x,\varphi]+m_x(t,x)\varphi(t)+\dfrac{\partial F_3(t,x)}{\partial x}. \end{cases} \tag{18}$$

где $A_1[v,v_x,\varphi]\equiv\int_0^t\int_0^1 K_2(t,x,\xi,s)v(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t\int_0^1 K_1(t,x,\xi,s)v_\xi(s,\xi)d\xi ds+$

$$+\int_0^t R(t,s)m(s,x)\varphi(s)ds,$$

$$A_2[v,v_x,\varphi] \equiv -\frac{1}{m(t,x_0)}\int_0^t\int_0^1 K_2(t,x_0,\xi,s)v(s,\xi)d\xi ds - \frac{1}{m(t,x_0)}\int_0^t\int_0^1 K_1(t,x_0,\xi,s)v_\xi(s,\xi)d\xi ds -$$

$$-\frac{1}{m(t,x_0)}\int_0^t R(t,s)m(s,x_0)\varphi(s)ds,$$

$$A_3[v,v_x,\varphi] \equiv \int_0^t\int_0^1 \frac{\partial K_2(t,x,\xi,s)}{\partial x}v(s,\xi)d\xi ds + \int_0^t\int_0^1 \frac{\partial K_1(t,x,\xi,s)}{\partial x}v_\xi(s,\xi)d\xi ds +$$

$$+\int_0^t R(t,s)m_x(s,x)\varphi(s)ds.$$

На основании теоремы [1], решение $\varphi(t), v(t,x),\ v_x(t,x)$ системы (18) существует и единственно в пространстве $C^{2,2}(\Omega)\times C[0,T]$.

Таким образом нами доказана следующая теорема.

Основная теорема. Если выполняется неравенство (17), то решение $u(t,x),\ \varphi(t)$ обратной задачи в пространстве $C^{2,2}(\Omega)\times C[0,T]$ существует и единственно.

Литература

1. ***Мамытов, А.О***. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой [Текст] / А.О. Мамытов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, - № 2. – С. 18–23.
2. ***Кабанихин, С.И.*** Обратные и некорректные задачи [Текст] / С.И. Кабанихин.- Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
3. ***Лаврентьев, М. М.*** Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. - М.: Наука, 1980. - 286 с.
4. ***Khalmatov, A. A.*** Spice of solutions to singularly perturbed equations / A. A. Khalmatov, K. A. Abbazova, G. Kanybek K, A. Baltabaev // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 57-63. – DOI 10.54834/16945220_2022_3_57. – EDN QCRAZR.
5. ***Halmatov, A. A.*** Construction of the asymptotic of the solution of a singularly perturbed partial differential equation with a special Lin / A. A. Halmatov, N. Nishanbaeva, K. A Absatar // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 29-33. – DOI 10.54834/16945220_2021_3_29. – EDN UHGWZY.
6. ***Tursunov D.A.,*** Orozov M.O., *Khalmatov A.A*. Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. –P. 1115-1122.