УДК 517.928

ПРИБЛИЖЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЬЦА

Халматов Анвар Авазович, к.ф.-м.н., haa83@mail.ru
Камилова Тургуной Хамидуллаевна, магистрант,
kamilovaturgunoy6@gmail.com
Мамыталиева Нархан Мамыталиевна, магистрант
Кыргызского-Узбекского Международного университета
имени Б.Сыдыкова, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В данной работе рассматривается неоднородная первая краевая задача, т.е. задача Дирихле в кольце для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными содержащий малый параметр перед лапласианом. Потенциал уравнения является гладкой функцией в кольце. Нас интересует влияние малого параметра на решение задачи Дирихле в кольце, при стремлении малого параметра к нулю справа. Для построения приближенно-асимптотического решения применяем метод Вишика-Люстерника, так называемый метод погранслоя. Следует отметить, что первоначальные идеи обоснования техники асимптотического интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных принадлежит Гольденвайзеру. Гольденвайзер представил свою идею при анализе уравнения теории оболочек. Если погранслой в теории упругости называют краевым эффектом, то в физике высоких энергий называют скейлингом, а в теории управления это жесткие системы. В результате нами построено равномерное асимптотическое разложение решения первой краевой задачи в кольце по малому параметру до второго порядка точности. Указана скорость сходимости остаточного члена к нулю при малых значениях малого параметра.*

Ключевые слова: *сингулярное возмущение, первая краевая задача, уравнение эллиптического типа, метод Вишика-Люстерника, лапласиан, потенциал.*

АЛКАК ҮЧҮН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН БИРИНЧИ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН-АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Халматов Анвар Авазович, ф.-м.и.к., haa83@mail.ru
Камилова Тургуной Хамидуллаевна, магистрант,
kamilovaturgunoy6@gmail.com
Мамыталиева Нархан Мамыталиевна, магистрант
Б.Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек эл аралык университети,
Ош, Кыргызстан.

Аннотация. *Бул макалада биз бир тектүү эмес биринчи чектик маселени карайбыз, б.а. алкакта сызыктуу, бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү лапласианынын астында кичи параметрди кармаган эллиптикалык типтеги теңдеме үчүн Дирихленин маселеси. Теңдеменин потенциалы алкакта жылма функция. Бизди кичинекей параметрдин алкакта Дирихле маселесинин чыгарылышына тийгизген таасири кызыктырат, анткени кичинекей параметр оң тараптан нөлгө умтулат. Болжолдуу асимптотикалык чыгарылышты тургузуу үчүн Вишик-Люстерник ыкмасын колдонобуз. Натыйжада биз кичинекей параметрге карата экинчи тартиптеги тактыкта алкактагы биринчи чектик маселенин чыгарылышынын биркалыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургуздук. Кичинекей параметрдин кичине маанилери үчүн калдык мүчөнүн нөлгө умтулуу ылдамдыгы көрсөтүлгөн.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдык козголуу, биринчи чектик маселе, эллиптикалык типтеги теңдеме, Вишик-Люстерник методу, Лапласиан, потенциал.*

APPROXIMATE-ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBATED FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A RING

Khalmatov Anvar Avazovich
Candidate of physical and mathematical sciences
haa83@mail.ru
Kamilova Turgunoy Khamidullaevna., masters student,
kamilovaturgunoy6@gmail.com
Mamytaliyeva Narkhan Mamytaliyeva, masters student,
Kyrgyz-Uzbek International University named after B.Sydykova,
Osh, Kyrgyzstan.

Abstract. *In this paper, we consider an inhomogeneous first boundary value problem, i.e. the Dirichlet problem in rings for a linear inhomogeneous second-order elliptic equation with two independent variables containing a small parameter in front of the Laplacian. The potential of the equation is a smooth function in the annulus. We are interested in the* *influence of a small parameter on the solution of the Dirichlet problem in a ring, as the small parameter tends to zero from the right. To construct an approximately asymptotic solution, we use the Vishik-Lyusternik method. As a result, we have constructed a uniform asymptotic expansion of the solution of the first boundary value problem in a ring in a small parameter up to the second order of accuracy in a small parameter. The rate of convergence of the remainder term to zero for small values of the small parameter is indicated.*

***Key words**: singular perturbation, first boundary value problem, elliptic type equation, Vishik-Lyusternik method, Laplacian, potential.*

Введение. Как известно, математические модели стационарных процессов характеризуются отдельными дифференциальными уравнениями эллиптического типа. Например, уравнения Лапласа и Пуассона характеризуют различные стационарные физические поля, стационарный аналог известного уравнения Шредингера в квантовой механике и уравнения Гельмгольца также выражаются уравнениями эллиптического типа, уравнение эллиптического типа, являющееся стационарным аналогом системы уравнений Навье-Стокса, характеризует любое течение. Ряд ученых проводили исследования дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярным возмущением [1]-[6]. Класс сингулярно возмущенных задач с точным решением очень узок, почти отсутствует. Поэтому построение асимптотики решения подобных задач на сегодняшний день является актуальным.

Постановка задачи. Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right)-p(x,y)u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in D, \tag{1}$$

$$u(x,y)=\psi(x,y),\ (x,y)\in D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=a^2, 0<a=const\}, \tag{2}$$

$$u(x,y)=\psi_2(x,y),\ (x,y)\in D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=b^2, 0<a<b=const<\infty\}, \tag{3}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр ($0<\varepsilon<<1$), $0<p_0<p(x,y)$, $f(x,y)$ – известные, достаточно гладкие функций в замкнутой области $\bar{D}$, $D=\{(x,y)\,|0<a^2<x^2+y^2<b^2<\infty,\ 0<a,b=const\}$ – кольцо.

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения задачи (1)-(3), когда $\varepsilon\to 0$.

Уравнение (1) является сингулярно возмущенной [5]. Попробуем построить равномерное приближение решения задачи (1)-(3) при стремлении малого параметра к нулю. Для решения поставленной задачи применяем метод Вишика-Люстерника [5].

Приближенное решение будем искать в виде:

$$u(x,y)=v(x,y)+w^a(\tau,\varphi)+w^b(\eta,\varphi)+R(x,y)\,, \tag{4}$$

где

$$v(x,y)=v_0(x,y)+\varepsilon v_1(x,y),$$
$$w^a(\tau,\varphi)=w_0^a(\tau,\varphi)+\mu w_1^a(\tau,\varphi)+\mu^2 w_2^a(\tau,\varphi),$$
$$w^b(\eta,\varphi)=w_0^b(\eta,\varphi)+\mu w_1^b(\eta,\varphi)+\mu^2 w_2^b(\eta,\varphi),$$
$$\tau=(\rho-a)/\mu,\ \ \eta=(b-\rho)/\mu,\ \ \rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=arctg\,\frac{y}{x},$$

$R(x,y)$ – остаточный член.

Подставляя (4) в (1) имеем:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}\right)-p(x,y)v(x,y)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 w^a}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\mu(a+\mu\tau)}\frac{\partial w^a}{\partial\tau}+\frac{1}{(a+\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w^a}{\partial\varphi^2}\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 w^b}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\mu(b-\mu\eta)}\frac{\partial w^b}{\partial\eta}+\frac{1}{(b-\mu\eta)^2}\frac{\partial^2 w^b}{\partial\varphi^2}\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial y^2}\right)-p(x,y)R(x,y)=f(x,y),$$

Отсюда составим следующие уравнения

$$-p(x,y)v_0(x,y)+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial y^2}-p(x,y)v_1(x,y)\right)=f(x,y), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_0^a}{\partial\tau^2}-p_0(\varphi)w_0^a+\mu\left(\frac{\partial^2 w_1^a}{\partial\tau^2}-p_0(\varphi)w_1^a+\frac{1}{a+\mu\tau}\frac{\partial w_0^a}{\partial\tau}\right)+\\ +\mu^2\left(\frac{\partial^2 w_2^a}{\partial\tau^2}-p_0(\varphi)w_2^a+\frac{1}{a+\mu\tau}\frac{\partial w_1^a}{\partial\tau}+\frac{1}{(a+\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_0^a}{\partial\varphi^2}\right)=0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_0^b}{\partial\eta^2}-\tilde{p}_0(\varphi)w_0^b+\mu\left(\frac{\partial^2 w_1^b}{\partial\eta^2}-\tilde{p}_0(\varphi)w_1^b-\frac{1}{b-\mu\eta}\frac{\partial w_0^b}{\partial\eta}\right)+\\ +\mu^2\left(\frac{\partial^2 w_2^b}{\partial\eta^2}-\tilde{p}_0(\varphi)w_2^b-\frac{1}{b-\mu\eta}\frac{\partial w_1^b}{\partial\eta}+\frac{1}{(b-\mu\eta)^2}\frac{\partial^2 w_0^b}{\partial\varphi^2}\right)=0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial y^2}\right)-p(x,y)R(x,y)=-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v_1(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1(x,y)}{\partial y^2}\right)-$$

$$-\frac{\mu^3}{a+\mu\tau}\frac{\partial w_2^a}{\partial\varphi}-\frac{\mu^3}{(a+\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_1^a}{\partial\varphi^2}-\frac{\mu^4}{(a+\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_2^a}{\partial\varphi^2}+ \tag{8}$$

$$+\frac{\mu^3}{b-\mu\eta}\frac{\partial w_2^b}{\partial\varphi}-\frac{\mu^3}{(b-\mu\eta)^2}\frac{\partial^2 w_1^b}{\partial\varphi^2}-\frac{\mu^4}{(b-\mu\eta)^2}\frac{\partial^2 w_2^b}{\partial\varphi^2}.$$

Равенство (5) расщепляется на два уравнения:

$$-p(x,y)v_0(x,y)=f(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial y^2}-p(x,y)v_1(x,y)=0,$$

Из первого соотношения имеем:

$$-p(x,y)v_0(x,y)=f(x,y)\Rightarrow\ v_0(x,y)=-\frac{f(x,y)}{p(x,y)};$$

а из второго:

$$v_1(x,y)=-\frac{1}{p(x,y)}\left(\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0(x,y)}{\partial y^2}\right).$$

По условию задачи функции $f(x,y)$ и $p(x,y)$ достаточно гладкие и функция $p(x,y)$ положительна во всей замкнутой области $\bar{D}$. Поэтому $v_0(x,y)$ и $v_1(x,y)$ тоже будут достаточно гладкими функциями.

Перейдем к равенству (6). Имеем:

$$\frac{\partial^2 w_0^a}{\partial\tau^2}-p_0(\varphi)w_0^a=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 w_1^a}{\partial\tau^2}-p_0(\varphi)w_1^a=-\frac{1}{a+\mu\tau}\frac{\partial w_0^a}{\partial\tau}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 w_2^a}{\partial\tau^2}-p_0(\varphi)w_2^a=-\frac{1}{a+\mu\tau}\frac{\partial w_1^a}{\partial\tau}-\frac{1}{(a+\mu\tau)^2}\frac{\partial^2 w_0^a}{\partial\varphi^2}; \tag{11}$$

Подставляя соотношение (4) в граничные условия (2) и (3) имеем:

$$w^a(0,\varphi)=\psi_1(\varphi)-\tilde{v}(a,\varphi),\quad \lim_{\tau\to\infty}w^a(\tau,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \tag{12}$$

$$w^b(0,\varphi)=\psi_2(\varphi)-\tilde{v}(b,\varphi),\quad \lim_{\tau\to\infty}w^b(\eta,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \tag{13}$$

$$R(x,y)|_{x^2+y^2=a^2}=0;\;\; R(x,y)|_{x^2+y^2=b^2}=0; \tag{14}$$

где $v(x,y)=\tilde{v}(\rho,\varphi)$.

Из соотношения (12) имеем:

$$w_0^a(0,\varphi)=\psi_1(\varphi)-\tilde{v}_0(a,\varphi),\;\; \lim_{\tau\to\infty} w_0^a(\tau,\varphi)=0,\; \varphi\in[0,2\pi]; \tag{15}$$

$$w_1^a(0,\varphi)=0,\;\; \lim_{\tau\to\infty} w_1^a(\tau,\varphi)=0,\; \varphi\in[0,2\pi]; \tag{16}$$

$$w_2^a(0,\varphi)=-\tilde{v}_1(a,\varphi),\;\; \lim_{\tau\to\infty} w_2^a(\tau,\varphi)=0,\; \varphi\in[0,2\pi]. \tag{17}$$

Решения задач (9), (15); (10), (16) и (11), (17) существуют, единственны и экспоненциально малы вне пограничного слоя [5]:

$$w_0^a(\tau,\varphi)=(\psi_1(\varphi)-\tilde{v}(a,\varphi))e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\,\tau},\;\; w_i^a(\tau,\varphi)=O(e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\,\tau}),\; \tau\to\infty,\; i=1,2.$$

Аналогично исследуется погранслой в окрестности окружности $x^2+y^2=b^2$, т.е. уравнение (7) с краевым условием (13). В результате получим:

$$w_0^b(\eta,\varphi)=(\psi_2(\varphi)-\tilde{v}(b,\varphi))e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\,\eta},$$

$$w_i^b(\eta,\varphi)=O(e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\,\eta}),\; \eta\to\infty,\; i=1,2.$$

Применяя свойство гладкости функций $v_1(x,y)$, $w_i^a(\tau,\varphi), w_i^b(\eta,\varphi)$, $i=1,2$ в соответствующих областях, уравнение (8) можно записать в виде:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial y^2}\right)-p(x,y)R(x,y)=O(\varepsilon^2),\; \varepsilon\to 0,\; (x,y)\in D, \tag{18}$$

Для оценки решения задачи (18), (14) применяя метод дифференциальных неравенств [5], получаем:

$$R(x,y)=O(\varepsilon^2),\; \varepsilon\to 0,\; (x,y)\in\bar{D}.$$

Доказана

Теорема. Для решения первой краевой задачи (1)-(3) в замкнутой области $\bar{D}$ при стремлении малого параметра ε к нулю справедливо следующее асимптотическое приближение:

$$u(x,y) = -\frac{f(x,y)}{p(x,y)} + \frac{1}{p(x,y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{f(x,y)}{p(x,y)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{f(x,y)}{p(x,y)}\right)\right) +$$
$$+(\psi_1(\varphi) - \tilde{v}(a,\varphi))e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\,\tau} + \mu e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\,\tau}\tau\,\tilde{w}_1^a(\tau,\varphi) + \mu^2 e^{-\sqrt{p_0(\varphi)}\,\tau}\tau\,\tilde{w}_2^a(\tau,\varphi) +$$
$$+(\psi_2(\varphi) - \tilde{v}(b,\varphi))e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\,\eta} + \mu e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\,\eta}\eta\,\tilde{w}_1^b(\eta,\varphi) + \mu^2 e^{-\sqrt{\tilde{p}_0(\varphi)}\,\eta}\eta\,\tilde{w}_2^b(\eta,\varphi) +$$
$$+O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0.$$

Литература

1. ***Бутузов, В. Ф.*** Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возму-щенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного урав-нения // Изв. РАН. Сер. матем. –2017. – Т. 81. – Вып. 3. – С. 21–44.
2. ***Зайцев, А. Б***. О принципе максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка // Изв. вузов. Матем. –2020. – № 8. – С. 11–17.
3. ***Tursunov D. A.,*** Orozov M.O., *Khalmatov A.A.* Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. –P. 1115-1122.
4. ***Khalmatov, A. A.*** Analysis of finding a solution to modular equations when the equation contains two or more modules / A. A. Khalmatov, G. A. Dadazhanova, K. A. Abbazova, N. Sayfiddin K // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 49-57. – DOI 10.54834/16945220_2022_3_49. – EDN JQQTXH.
5. ***Khalmatov, A. A.*** Spice of solutions to singularly perturbed equations / A. A. Khalmatov, K. A. Abbazova, G. Kanybek K, A. Baltabaev // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 57-63. – DOI 10.54834/16945220_2022_3_57. – EDN QCRAZR.
6. ***Halmatov, A. A.*** Construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed nonlinear equation with a singular point / A. A. Halmatov, A. A. Baltabaeva, K. G Kanybek // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 34-40. – DOI 10.54834/16945220_2021_3_34. – EDN LWIYNU.
7. ***Halmatov, A. A.*** Construction of the asymptotic of the solution of a singularly perturbed partial differential equation with a special Lin / A. A. Halmatov, N. Nishanbaeva, K. A Absatar // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 29-33. – DOI 10.54834/16945220_2021_3_29. – EDN UHGWZY.