УДК 517.928.2

БУРУЛУУ ЧЕКИТИНЕ ЭЭ БОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор,
dtursunov@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети,
Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович, ф.-м.и.к, доцент,
Б.Сыдыков атындагы Кыргыз-Өзбек Эл аралык университети,
Садиева Акбермет Сайиповна, аспирант
Ош мамлекеттик университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада Волфранг Ричард Вазовдун (25.07.1909-11.09.1993) бир тектүү эмес теңдемеси үчүн баштапкы маселенин асимптотикалык чыгарылышын тургузуу маселеси каралган. В. Вазовдун бир тектүү эмес теңдемелер системасы сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин классына таандык. Изилденип жаткан маселенин өзгөчөлүктөрү: 1) баштапкы чекитте негизги матрицанын тескериси жашабайт; 2) кичине параметр туундуунун астында катышат; баштапкы чекиттен башка чекиттерде негизги матрица биринчи даражадагы эки элементардык бөлүүчүгө, ал эми баштапкы чекитте экинчи даражадагы бир элементардык бөлүүчүгө ээ. Мындан сырткары Вазовдун теңдемесинин спектри туруксуз болот. Коюлган маселенин бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы жалпыланган чектик функциялар методунун жардамында тургузулат.*

Ачкыч сөздөр: *туруксуз спектр, В. Вазовдун теңдемелер системасы, бурулуу чекити, сингулярдык козголгон Кошинин маселеси, кичине параметр, чектик функциялар.*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор,
dtursunov@oshsu.kg,

Ошский государственный университет,
Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович, к.ф.-м.н., доцент,
Кыргызско-Узбекский Международный университет имени Б.Сыдыкова,
Садиева Акбермет Сайиповна, аспирант
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье рассматривается задача построения асимптотического решения начальной задачи для неоднородного уравнения Волфранга Ричарда Вазова (25.07.1909-11.09.1993). Неоднородная система уравнений В. Вазова относится к классу сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенности исследуемой задачи: 1) в начальной точке основная матрица необратима; 2) перед производной присутствует малый параметр; в точках, отличных от начальной точки, главная матрица имеет два элементарных делителя первой степени и один элементарный делитель второй степени в начальной точки. Кроме того, спектр уравнения Вазова неустойчива. Асимптотическое разложение поставленной задачи строится методом обобщенных пограничных функций*.

Ключевые слова: *нестабильный спектр, система уравнений В.Вазова, точка поворота, сингулярно возмущенная задача Коши, малый параметр, пограничные функций.*

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A TURNING POINT

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich,
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Osh state university,
dtursunov@oshsu.kg
Zulpukarov Altynbek Zulpukarovich,
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Kyrgyz-Uzbek International University named after B. Sydykov,
Sadieva Akbermet Sayipovna, postgraduate student
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article deals with the problem of constructing an asymptotic solution of the initial problem for the inhomogeneous Wolfgang Richard Wasow (25.07.1909-11.09.1993) equation. The inhomogeneous system of equations of V. Vazov belongs to the class of singularly perturbed ordinary differential equations. Features of the problem under study: 1) at the initial point, the main matrix is irreversible; 2) there is a small* *parameter before the derivative; at points other than the starting point, the main matrix has two elementary divisors of the first degree and one elementary divisor of the second degree at the starting point. In addition, the spectrum of the Vazov equation is unstable. The asymptotic expansion of the formulated problem is constructed by the method of generalized boundary functions.*

Keywords*: unstable spectrum, V. Vazov's system of equations, turning point, singularly perturbed Cauchy problem, small parameter, boundary functions.*

Маселенин коюлушу. Сингулярдык козголгон, бир тектүү эмес, сызыктуу, биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн Кошинин маселесин изилдейбиз:

$$\begin{cases} \varepsilon y'(x) = z(x) + f_1(x), \\ \varepsilon z'(x) = -x \cdot y(x) + f_2(x), \end{cases} \quad x \in (0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = y^0,\ z(0) = z^0, \tag{2}$$

мында 0<ε<<1, $f_1, f_2 \in C^\infty[0,1]$, y^0, z^0 – const, $y(x)$, $z(x)$ белгисиз функциялар.

Эгерде төмөнкүдөй белгилөө кийирип алсак:

$$W(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix},\ A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},$$

анда (1)-(2) маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon W'(x) = A(x)W(x) + F(x),\ x \in (0,1], \quad W(0) = W^0 \ . \tag{3}$$

Белгилеп кетүү керек, $\varepsilon W'(x) = A(x)W(x)$ бир тектүү система Вазовдун [1]-[5] эмгектеринде $x \neq 0$ болгон учурда изилденген. Себеби $x \neq 0$ болгондо $A(x)$ матрицасы биринчи даражадагы эки элементардык бөлүүчүгө, ал эми $x=0$ болгондо экинчи даражадагы бир элементардык бөлүүчүгө ээ. Ошондой болсо дагы $\lambda^2 - x$ эки мүчөсү каалаган x тер үчүн туруктуу сандан айрымаланган жалгыз инварианттык көбөйтүүчү болот [1, 182-бет].

Биз $x \in [0,1]$ кесиндиде (1)-(2) маселенин чыгарылышынын кичине параметр нөлгө умтулгандагы бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасын тургузабыз.

Маселенин чыгарылышы. Алгач тышкы чыгарылышты тургузабыз, анткени ал бизге ички чыгарылышты тургузууда кандай өзгөртүп түзүү керектигин аныктап берет. Кичине параметр методун колдонуп, тышкы чыгарылышты төмөнкү катарлар көрүнүштө издейбиз [6]:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots \\ z(x) &= z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

ушул (4)- катарларды (1)- системага коюуп $y_i(x)$ жана $z_i(x)$ лерди аныктап, закон ченемдүүлүктү таап алабыз:

$$\begin{cases} \varepsilon\left(y'_0(x) + \varepsilon y'_1(x) + \varepsilon^2 y'_2(x) + \ldots\right) = z_0(x) + \varepsilon z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \ldots + f_1(x) \\ \varepsilon\left(z'_0(x) + \varepsilon z'_1(x) + \varepsilon^2 z'_2(x) + \ldots\right) = -x \cdot \left(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots\right) + f_2(x) \end{cases}$$

мындан, кичине параметр методунун негизги маңызы боюнча, кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлайбыз:

$$z_0(x) + f_1(x) = 0 \Rightarrow z_0(x) = -f_1(x); \qquad -xy_0(x) + f_2(x) = 0 \Rightarrow y_0(x) = x^{-1} f_2(x);$$
$$z_k(x) = y'_{k-1}(x),\ k \in N; \qquad y_k(x) = -x^{-1} z'_{k-1}(x),\ k \in N.$$

Аныкталган белгисиз $y_i(x)$ жана $z_i(x)$ функциялардын өзгөчөлүктөрүн көрсөтүп жазабыз:

$$z_1(x) = y'_0(x) = x^{-2}\tilde{z}_1(x), \qquad y_1(x) = -x^{-1} z'_0(x) = x^{-1}\tilde{y}_1(x),$$

$$z_2(x) = y'_1(x) = x^{-2}\tilde{z}_2(x), \qquad y_2(x) = -x^{-1} z'_1(x) = x^{-4}\tilde{y}_2(x),$$

$$z_{2k}(x) = y'_{2k-1}(x) = x^{-2-3(k-1)}\tilde{z}_{2k}(x), \quad y_{2k}(x) = -x^{-1} z'_{2k-1}(x) = x^{-1-3k}\tilde{y}_{2k}(x),\ k \in N,$$

$$z_{2k+1}(x) = y'_{2k}(x) = x^{-2-3k}\tilde{z}_{2k+1}(x), \quad y_{2k+1}(x) = -x^{-1} z'_{2k}(x) = x^{-1-3k}\tilde{y}_{2k+1}(x),\ k \in N.$$

Табылган $y_i(x)$ жана $z_i(x)$ функциялардын өзгөчөлүктөрүн эске алуу менен (4)- катарга алып барып коебуз:

$$y(x)=x^{-1}f_2(x)+\varepsilon x^{-1}\tilde{y}_1(x)+\varepsilon^2 x^{-4}\tilde{y}_2(x)+\varepsilon^3 x^{-4}\tilde{y}_3(x)+\ldots+$$
$$+(\varepsilon^2 x^{-3})^k x^{-1}\left(\tilde{y}_{2k}(x)+\varepsilon\tilde{y}_{2k+1}(x)\right)+\ldots$$
$$z(x)=-f_1(x)+\varepsilon x^{-2}\tilde{z}_1(x)+\varepsilon^2 x^{-2}\tilde{z}_2(x)+\varepsilon^3 x^{-5}\tilde{z}_3(x)+\varepsilon^4 x^{-5}\tilde{z}_4(x)+\ldots+$$
$$+\varepsilon x^{-2}(\varepsilon^2 x^{-3})^k\left(\tilde{z}_{2k+1}(x)+\varepsilon\tilde{z}_{2k+2}(x)\right)+\ldots$$

Тургузулган тышкы чыгарылыш баштапкы шартты канааттандырбайт жана баштапкы чекиттин чеке белинде асимптотикалык мүнөзүн жоготот. Бирок тышкы чыгарылыштан биз ички чыгарылыш кандай өзгөрүлмө боюнча ажыралышы керек деген маалыматты алабыз:

$$\varepsilon^2 x^{-3}=\left\| x=\mu^2 t,\quad \mu^3=\varepsilon \right\|=\mu^6(\mu^2 t)^{-3}=t^{-3}.$$

(1)-(2)- маселенин бир калыптагы толук асимптотикалык ажыралмасын жалпыланган чектик функциялар методун колдонуп тургузабыз [7], [8].

Асимптотикалык чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi_j(t);\ z(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j z_j(x)+\frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t), \qquad (5)$$

мында $y_j(x)$ жана $z_j(x)$ – жылма тышкы чыгарылыштын мүчөлөрү;

$\pi_j(t)$ жана $w_j(t)$ – чектик функциялар, $t=\dfrac{x}{\mu^2}$, $\mu=\sqrt[3]{\varepsilon}$.

(5)- катарларды (1)- теңдемеге алып барып коюуп төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j+1}y'_j(x)+\dfrac{1}{\mu}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi'_j(t)=\dfrac{1}{\mu}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j z_j(x)+f_1(x)\\ \sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j+1}z'_j(x)+\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu^j w'_j(t)=-t\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu^j\pi_j(t)-x\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)+f_2(x)-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k\end{cases} \qquad (6)$$

(5)- катарларды (2)- баштапкы шартта алып барып коюуп төмөнкү катыштарды алабыз:

$$\begin{aligned}&\pi_{3k}(0)=\pi_{3k+1}(0)=0, k=0,1,\ldots;\\ &\pi_2(0)=y^0-y_0(0), \pi_{3k+2}(0)=-y_k(0), k=1,2,\ldots;\\ &w_{3k}(0)=w_{3k+2}(0)=0, k=0,1,\ldots;\\ &w_1(0)=z^0-z_0(0), w_{3k+1}(0)=-z_k(0),\ k=1,2,\ldots\end{aligned} \qquad (7)$$

(6)- системадан жылма тышкы чыгарылыштын мүчөлөрүн аныктап алабыз:

$$z_0(x) = -f_1(x), \quad y_0(x) = \frac{f_2(x) - h_0}{x} = \tilde{y}_0(x), \; h_0 = f_2(0);$$

$$z_1(x) = \tilde{y}'_0(x), \quad y_1(x) = -\frac{z'_0(x) + h_1}{x} = \tilde{y}_1(x), \; h_1 = -z'_0(0); \tag{8}$$

$$z_k(x) = \tilde{y}'_{k-1}(x), \; k \in N,$$

$$y_k(x) = -\frac{z'_{k-1}(x) + h_k}{x} = \tilde{y}_k(x), \; h_k = -z'_{k-1}(0), \; k \in N;$$

Эми чектик функцияларды тургузууга киришебиз. (6)- системадан төмөнкү системаны бөлүп алабыз:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi'_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w'_j(t) = -t \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k \end{cases} \tag{9}$$

мындан (7)- баштапкы шарттарды эске алып, төмөнкү системаларды алабыз:

$$\begin{cases} \pi'_{3k}(t) = w_{3k}(t), \quad t \in [0, \mu^{-2}], \quad \pi_{3k}(0) = 0, \\ w'_{3k}(t) = -t\pi_{3k}(t) + h_k, \quad w_{3k}(0) = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \pi'_{3k+1}(t) = w_{3k+1}(t), \quad t \in [0, \mu^{-2}], \quad \pi_{3k+1}(0) = 0 \\ w'_{3k+1}(t) = -t\pi_{3k+1}(t), \quad w_1(0) = z^0 - z_0(0), w_{3k+1}(0) = -z_k(0); \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \pi'_{3k+2}(t) = w_{3k+2}(t), \quad t \in [0, \mu^{-2}], \quad \pi_2(0) = y^0 - y_0(0), \pi_{3k+2}(0) = -y_k(0), \\ w'_{3k+2}(t) = -t\pi_{3k+2}(t), \quad w_{3k+2}(0) = 0; \end{cases} \tag{12}$$

(10), (11) жана (12)- Кошинин маселелеринин системаларынын чыгарылыштарынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөөчү лемманы келтиребиз.

Лемма. Төмөнкү баштапкы маселенин чыгарылышы жашайт жана жалгыз:

$$\begin{cases} v'(t) = u(t), \quad t \in [0, \mu^{-2}], \quad v(0) = \alpha, \\ u'(t) = -tv(t) + h, \quad u(0) = \beta, \quad \alpha, \beta, h = const. \end{cases}$$

Далилдөө. Системанын биринчи теңдемесинен туунду алабыз:

$$v'(t) = u(t) \;\Rightarrow\; v''(t) = u'(t),$$

акыркы барабардыкты системанын экинчи теңдемесине коюуп жана баштапкы шарттарды эске алып, төмөнкү маселени алабыз:

$$v''(t) = -tv(t) + h, v(0) = \alpha,\ v'(0) = \beta.$$

Бизге белгилүү болгондой [6], $v''(t) = -tv(t) + h$ бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$v(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + h\psi(t),\ \psi(t) = \frac{\pi}{3}\int_{\infty}^{t} \left(v_2(t)v_1(\tau) - v_2(\tau)v_1(t) \right) d\tau,$$

мында $v_1(t) = \sqrt{t} J_{1/3}(2t^{3/2}/3), v_2(t) = \sqrt{t} Y_{1/3}(2t^{3/2}/3).$

Бул эки функциянын негизги касиеттерин белгилеп кетебиз:

$$v_{1,2}(t) = O(t^{-1/4}),\ t \to \infty;\ v_1(0) = 0,\ v'_1(0) \neq 0; v_2(0) \neq 0,\ v'_2(0) = 0.$$

Бул касиеттерди эске алып жалпы чыгарылыштагы эрктүү туруктуулардын маанилерин аныктап алабыз:

$$\begin{cases} c_2 v_2(0) = \alpha - h\psi(0) \\ c_1 v'_1(0) = \beta - h\psi'(0) \end{cases} \Rightarrow \quad c_2 = \frac{\alpha - h\psi(0)}{v_2(0)}; \quad c_1 = \frac{\beta - h\psi'(0)}{v'_1(0)};$$

Демек,

$$v(t) = \frac{\beta - h\psi'(0)}{v'_1(0)} v_1(t) + \frac{\alpha - h\psi(0)}{v_2(0)} v_2(t) + h\psi(t),$$

$$u(t) = v'(t) = \frac{\beta - h\psi'(0)}{v'_1(0)} v'_1(t) + \frac{\alpha - h\psi(0)}{v_2(0)} v_2'(t) + h\psi'(t).$$

Ушул лемманын негизинде (10), (11) жана (12)- системалардын чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат жана бул чыгарылыштар чек аралык катмардын ичинде гана маанилүү болуп чек аралык катмардын сыртында кичине параметр нөлгө умтулганда маанилүү болбой калат. Ошондуктан бул функцияларды чектик функциялар деп аташат:

$$\pi_{3k}(t) = -\frac{h_k \psi'(0)}{v'_1(0)} v_1(t) - \frac{h_k \psi(0)}{v_2(0)} v_2(t) + h_k \psi(t),$$

$$w_{3k}(t) = -\frac{h_k \psi'(0)}{v'_1(0)} v'_1(t) - \frac{h_k \psi(0)}{v_2(0)} v_2'(t) + h_k \psi'(t);$$

$$\pi_{3k+1}(t) = \frac{w_{3k+1}(0)}{v'_1(0)} v_1(t), \qquad w_{3k+1}(t) = \frac{w_{3k+1}(0)}{v'_1(0)} v'_1(t), \qquad (13)$$

$$\pi_{3k+2}(t) = \frac{\pi_{3k+2}(0)}{v_2(0)} v_2(t), \quad w_{3k+2}(t) = \frac{\pi_{3k+2}(0)}{v_2(0)} v'_2(t),$$

Натыйжада биз төмөнкү теореманы далилдедик

Теорема. (1)-(2) - Коши маселесинин чыгарылышы үчүн кичине параметр нөлгө умтулганда, $x \in [0,1]$ кесиндиде төмөнкү формалдуу асимптотикалык ажыралма орун алат:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j y_j(x) + \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \pi_j(t); \; z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t),$$

мында $y_j(x)$ жана $z_j(x)$ функциялар (8)де, $\pi_j(t)$ жана $w_j(t)$ лар (13)тө аныкталган.

Адабияттар

1. ***Wasow W.*** Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publishers, New York. 1965.
2. ***Wasow W.*** On boundary layer problems in the theory of ordinary differential equations, Mathematics Research Center, University of Wisconsin–Madison, Technical Summary Report, 2244. 1981.
3. ***Wasow W.*** A turning point problem for a system of two linear differential equations, /. Math. Phys., 38 A960), 257—278.
4. ***Wasow W.*** Turning point problems for systems of linear equations, I. The formal theory, Comm. Pure Appl. Math., 14 A961), 657–673.
5. ***Wasow W.*** Turning point problems for systems of linear differential equations, II. The analytic theory, Comm. Pure Appl. Math., 15 A962), 173–187.
6. ***Турсунов Д. А.,*** Кожобеков К.Г., Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота, Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 156, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 84–88; J. Math. Sci. (N. Y.), 254:6 (2021), 788–792.
7. ***Турсунов Д.А.,*** Кожобеков К.Г. Асимптотическое решение задачи Неймана с нерегулярной особой точкой. Дифференциальные уравнения, геометрия и топология, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 201, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 98–102.
8. ***Кожобеков К.Г.*** Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:3 (2019), 332–340.