УДК 517.957

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Токторбаев Айбек Мамадалиевич, k.ф.-м.н., доцент,
atoktorbev@gmail.com
Пакал уулу Долонбек преподаватель,
dolon96.99@gmail.com
Ошский государственный университет Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В настоящей статье исследуется система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая одномерное течение реагирующей смеси газов в пористой среде. Рассматривается неограниченная область. Причем искомые функции в начальный момент времени стремятся к нулю, что приводит к вырождению уравнений. Рассмотрена задача Коши для уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов. В начальный момент времени все характеристики среды известны и имеют различные пределы на бесконечности. Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение реагирующей смеси газов. Изучается задача Коши с вырождающихся начальными данными, соответствующими об одной задаче. Причем искомые функции в начальный момент времени имеют об одной задаче на бесконечности. Особенностью течений с конечной вязкостью является отсутствие в них ударных волн, т.е. кроме контактного, другого сильного разрыва быть не может. Доказывается существование обобщенного решения методом регуляризации.*

Ключевые слова: *скорость, плотность, температура, магнитное поле, электрическое поле, обобщенное решение, априорные оценки, существование, системы уравнений.*

РЕАКЦИЯ КЫЛУУЧУ ГАЗДАРДЫН АРАЛАШМАСЫНЫН КУБУЛГАН ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН КОШИНИН МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

Токторбаев Айбек Мамадалиевич, ф.-м.и.к., доцент,
atoktorbev@gmail.com
Пакал уулу Долонбек, окутуучу, dolon96.99@gmail.com
Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада биз сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер системасын изилдейбиз, алар реакцияга кирүүчү газ аралашмасынын бир өлчөмдүү агымын көзөнөктүү чөйрөдө сүрөттөйт. Чексиз аймак каралат. Мындан тышкары, каалаган функциялар убакыттын баштапкы моментинде нөлгө жакын болот, бул теңдемелердин бузулушуна алып келет. Реакциялашкан газ аралашмасынын агымын мүнөздөгөн теңдемелерге Коши маселеси каралат. Убакыттын баштапкы моментинде чөйрөнүн бардык мүнөздөмөлөрү белгилүү жана чексиздикте ар кандай чектерге ээ. Реакциялашкан газ аралашмасынын бир өлчөмдүү туруксуз агымын сүрөттөгөн дифференциалдык теңдемелердин системасы изилденген. Бир маселеге туура келген бузулган баштапкы маалыматтар менен Коши маселесин изилдейбиз. Болгондо да, убакыттын баштапкы моментинде каалаган функциялар чексиздикте болжол менен бир маселеге ээ. Чектүү илешкектүүлүктөгү агымдардын өзгөчөлүгү аларда сокку толкундарынын жоктугу, б.а. байланыштан башка эч кандай күчтүү ажырым болушу мүмкүн эмес. Жалпыланган чечимдин бар экендиги регуляризация ыкмасы менен далилденет.*

Ачкыч сөздөр: *ылдамдык, тыгыздык, температура, магнит талаасы, электр талаасы, жалпыланган чечим, априордук баалоо, бар болуу, теңдемелер системасы.*

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATE EQUATIONS OF A REACTING GAS MIXTURE

Toktorbaev Aibek Mamadalievich, candidate of physical sciences,
associate professor, atoktorbev@gmail.com
Pakal uulu Dolonbek, teacher, dolon96.99@gmail.com
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this article, a system of nonlinear differential equations describing the one-dimensional flow of a reacting mixture of gases in a porous medium is investigated. An unlimited domain is considered. Moreover, the desired functions tend to zero at the initial moment of time, which leads to the degeneracy of the equations. The Cauchy problem for the equations describing flow of a reacting mixture of gases is considered. At the initial time all medium characteristics are know and have various limits at infinity. A system of differential equations is investigated that describes a one-dimensional unsteady flow of a reacting gas mixture. We study the Cauchy problem with degenerate initial data corresponding to one problem. Moreover, the desired functions at the initial moment of time have about one problem at infinity. A feature of flows with finite viscosity is the absence of shock waves in them, i.e. except for the contact, there can be no other strong gap. The existence of a generalized solution is proved by the method of regularization.*

Keywords: *velocity, density, temperature, magnetic field, electric field, generalized solution, a priori estimates, existence, systems of equations.*

Система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов с учетом пористости среды в массовых лагранжевых координатах, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho^2\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\chi\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial c}{\partial x}\right)-c\,g, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right)-r\frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta)-\beta(x)|u|^{\alpha}u,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\rho^{3/2}\,\theta\frac{\partial c}{\partial x}\right)-r\rho\,\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\,\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\delta\,c\,g,$$

здесь $u,\ \theta,\ \rho,\ c$ – соответственно скорость, абсолютная температура, плотность и массовая концентрация компонент – искомые функции пространственной переменной $x,\ x\in R=(-\infty;\infty)$ и времени $t,\ t\in[0,T],\ 0<T<\infty$; $\mu,\ r,\ \lambda,\ \nu,\ \chi$ – положительные постоянные, которые в дальнейшем, для простоты, будем предполагать равными единице; $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости - непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\beta(x)dx\le C;\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\beta(x))^{2/(2-3\alpha)}dx\le C;\quad 0\le\alpha<2/3.$

В момент времени $t=0$ значения функций $\rho, u, \theta,\ c$ предполагаются известными:

$$\rho\,|_{t=0}=\rho^0(x),\ u\,|_{t=0}=u_0(x),\ \theta\,|_{t=0}=\theta_0(x),\ c\,|_{t=0}=c_0(x),\quad x\in R, \tag{2}$$

причем $\left(\rho^0, u_0, \theta_0, c_0\right)$ - непрерывные, $0 \le c_0 \le 1$, $\left(\rho^0, \theta_0\right)$ - ограниченные, неотрицательные функции и имеют нулевые пределы на бесконечности:

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho^0(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \theta_0(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} c_0(x) = 0. \qquad (3)$$

Определение. *Обобщенным решением задачи (1) - (3) называется совокупность функций* (u, ρ, θ, c), *обладающих свойствами*

$$(u_x, \theta_x, c_x, \rho, \rho_x, \rho_t) \in L_\infty(0,T; L_2(R)),$$

$$\left(u_t,\ \theta_t, c_t, \sqrt{\rho^0} u_{xx}, \sqrt{\rho^0}\theta_{xx}, \sqrt{\rho^0} c_{xx}\right) \in L_2(\Pi),$$

и удовлетворяющих уравнениям (1) почти всюду в $\Pi = R \times (0,T)$.

Теорема. *Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям:*

$$\left(\rho^0,\ u_0,\ \theta_0, c_0\right) \in W_2^1(R),\ (c_0,\ \theta_0) \in L_1(R),\ \left(\rho_x^0\right)^2 < C\,\rho^0(x),\ x \in R,$$

$$\frac{\beta(x)}{\rho^0} \le C \quad \frac{\rho_x^0}{\rho^0} \in L_2(R), \qquad \int_A^B \int_x^{x+1} \left(\rho_\xi^0\right)^2 d\xi dx < C \quad \forall A, B \in R,\ A < B.$$

Функция $g(\rho, c, \theta) = \rho\,\eta(c, \theta)$, *где* $\eta(c,\theta)$ *предполагается непрерывной, неотрицательной в любой компактной области своих аргументов и удовлетворяющей условию Липшица по* $\theta^{1/2}$. *Тогда в полосе* $\Pi = R \times (0,T)$ *с произвольной конечной высотой* T, $0 < T < \infty$, *существует обобщенное решение задачи (1) - (3).*

Доказательство сформулированной теоремы проведем методом регуляризации. Для этого вместо поставленной задачи будем рассматривать регуляризованную задачу:

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \rho_\varepsilon^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_\varepsilon \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x}\right) - c_\varepsilon\, g, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right) - r \frac{\partial}{\partial x}(\rho_\varepsilon \theta_\varepsilon) - \beta(x)|u_\varepsilon|^\alpha u_\varepsilon,$$

$$\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t}=\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_\varepsilon\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_\varepsilon^{3/2}\theta_\varepsilon\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x}\right)-r\rho_\varepsilon\theta_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}+\mu\rho_\varepsilon\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\delta c_\varepsilon g,$$

$$\rho_\varepsilon\,|_{t=0}=\rho_\varepsilon^0(x),\ u_\varepsilon\,|_{t=0}=u_0(x),\ \theta_\varepsilon\,|_{t=0}=\theta_0(x),\ c_\varepsilon\,|_{t=0}=c_0(x) \qquad (5)$$

$$0<\varepsilon\le\rho_\varepsilon^0(x)\le M,\ 0\le\theta_0(x)\le M,\ 0\le c_0(x)\le 1,$$

где $\lim\limits_{|x|\to\infty}\rho_\varepsilon^0(x)=\varepsilon$, $\rho_\varepsilon^0=\rho^0+\varepsilon$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|\rho_\varepsilon^0-\rho^0\right\|_{W_2^1(K)}=0$, здесь K - произвольный компакт в R. Для регуляризованной задачи теорема существования и единственности локального решения следует из [2, 3]. В дальнейшем индекс ε будем опускать. Наша цель заключается в нахождении равномерных по ε оценок и осуществлении предельного перехода по ε. Примем $\delta=1$. В дальнейшем через C, N_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от ε.

Первое уравнение системы (4)

$$\rho\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial t}\ln\rho$$

подставим во второе уравнение с последующим интегрированием по t:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\rho(x,t)+r\int_0^t\rho(x,\tau)\theta(x,\tau)\,d\tau\right]=\frac{\partial}{\partial x}\ln\rho^0(x)-u(x,t)+u_0(x)-\int_0^t\beta(x)|u|^\alpha u\,d\tau.$$

Вторичное интегрирование по x при фиксированном t от точки x_0 до произвольного x и последующее потенцирование дает равенство:

$$\rho(x,t)\exp\left\{r\int_0^t\rho(x,\tau)\theta(x,\tau)\,d\tau\right\}=\rho^0(x)Y(t,x_0)B(x,t)K^{-1}(x,t), \qquad (6)$$

где

$$Y(t,x_0)=\frac{\rho(x_0,t)}{\rho^0(x_0)}\exp\left\{r\int_0^t\rho(x_0,\tau)\theta(x_0,\tau)\,d\tau\right\},$$

$$B(x,t)=\exp\int_{x_0}^x\left[u_0(\xi)-u(\xi,t)\right]d\xi, \qquad K(x,t)=\exp\int_0^t\int_0^x\beta(x)|u|^\alpha u\,d\xi d\tau.$$

В выборе точки x_0 остался произвол. Обе части (6) умножим на $r\theta(x,t)$ и проинтегрируем по t:

$$\exp\left\{ r\int_0^t \rho(x,\tau)\theta(x,\tau)\,d\tau \right\} = 1 + r\rho^0(x)\int_0^t Y(\tau,x_0)B(x,\tau)K^{-1}(x,\tau)\theta(x,\tau)\,d\tau .$$

Возвращаясь к (6), находим

$$\rho(x,t) = \rho^0(x)Y(t,x_0)B(x,t)K^{-1}(x,t)\times$$

$$\times\left[1 + r\rho^0(x)\int_0^t Y(t,x_0)B(x,\tau)K^{-1}(x,\tau)\theta(x,\tau)\,d\tau \right]^{-1}. \qquad (7)$$

Для вывода необходимых оценок разобьем ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники, обладающие свойствами:

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \overline{\Omega}_N, \quad \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \overline{Q}_N, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \ i \neq j,$$

$$\Omega_N = \{ x \mid A_N < x < A_{N+1} \}, \ Q_N = \Omega_N \times (0,T), \ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ \sup_k \left| A_{k+1} - A_k \right| < \infty$$

Будем изучать соотношение между искомыми функциями на каждом Q_N. Воспользуемся произволом для точки x_0. В дальнейшем всюду будем предполагать, что точка x_0 выбрана в соответствующей Ω_N.

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$N_1^{-1} \le B(x,t) \le N_1 < \infty, \qquad (x,t) \in Q_N . \qquad (8)$$

Умножая третье уравнение системы (4) на u и складывая со вторым и четвертым, получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + (\lambda - \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + (\chi - \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial c}{\partial x} \right) -$$

$$- r\frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta u) + \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{3/2}\theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \beta(x)|u|^{\alpha} u^2, \qquad (9)$$

где $\quad \omega(x,t) = \dfrac{1}{2}u^2(x,t) + \theta(x,t) + c(x,t).$

Из свойств решений для регуляризованной задачи вытекает неотрицательность θ, c. Интегрируя последнее равенство по R и по t, имеем оценки:

$$\| u(t)\|^2 + \| \theta(t)\|_{1,R} + \| c(t)\|_{1,R} \le N_2, \qquad (10)$$

$$\int_0^T \int \beta(x)|u|^{\alpha} u^2 dxdt \le N_3 .$$

Отсюда и следует утверждение (8).

При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$N_2^{-1} \le K(x,t) \le N_2 < \infty, \qquad (x,t) \in Q_N . \qquad (11)$$

Применяя неравенство Гельдера, (10), условия для $\beta(x)$, получим

$$\left| \int_0^t \int_0^x \beta(\xi)|u|^{\alpha} u\,(\xi,\tau) d\xi\, d\tau \right| \le \int_0^t \int_{A_N}^{A_{N+1}} \beta(x)|u|^{\alpha+1} dxd\tau \le$$

$$\le \int_0^t \left(\int_{A_N}^{A_{N+1}} u^2 dx \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(\int_{A_N}^{A_{N+1}} \beta^{\frac{2}{1-\alpha}}(x) dx \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} + C \le C.$$

Отсюда следует двойное неравенство (11).

При выполнении условий теоремы для любых $A, B \in R$, где $A < B$ справедливы оценки:

$$B - A - C_0\sqrt{B-A} \le \int_A^B \int_x^{x+1} \frac{\rho^0(\xi)}{\rho(\xi,t)} d\xi\, dx \le B - A + C_0\sqrt{B-A} . \qquad (12)$$

Доказательство аналогично [4].

При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$N_3^{-1} \le Y(t, x_0) \le N_3 < \infty, \quad \forall (x_0, t) \in Q_N .$$

Доказательство вытекает из представления (7) и оценок (12).

Умножим второе уравнение системы (4) на $c(x,t)$. После интегрирования по $x \in R$ и по $t \in [0,T]$, с учетом условий теоремы, заключаем

$$\max_{0 \le t \le T} \| c(t)\|^2 + \int_0^T \int \left(\rho\, c_x^2 + c^2 g \right) dxdt \le N_4 .$$

Пусть $f(x,t)$ – непрерывная функция. Обозначим

$$M_f^N(t)=\max_{x\in\Omega_N} f(x,t),\ \overline{M}_f(t)=\max_{x\in R} f(x,t),\ m_f^N(t)=\min_{x\in\Omega_N} f(x,t),\ \overline{m}_f(t)=\min_{x\in R} f(x,t)$$

При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$\overline{M}_{\rho/\rho^0}(t)\le N_5\,, \qquad M_{\rho^0/\rho}(t)\le N_6\left[1+\int_0^t M_{\rho^0\theta}(\tau)d\tau\right]. \qquad (13)$$

Доказательство (13) следует из представления (7).

Получим еще несколько вспомогательных соотношений для температуры. Положим

$$I_0^N(t)=\int_{\Omega_N}\rho^0(x)\theta_x^2(x,t)dx,\ \ I_1^N(t)=\int_{\Omega_N}\rho(x,t)\theta_x^2(x,t)dx,\ \ \bar{I}_1(t)=\int\rho(x,t)\theta_x^2(x,t)dx,$$

$$I_{01}^N(t)=\int_0^t I_0^N(\tau)\,d\tau\,,\quad I_{11}^N(t)=\int_0^t I_1^N(\tau)\,d\tau,\quad \bar{I}_{11}(t)=\int_0^t \bar{I}_1(\tau)\,d\tau,$$

где $N=0,\pm1,\pm2,...$ Для удобства, в дальнейшем, индекс N будем опускать.

При выполнении условий теоремы имеют место неравенства

$$M_{\rho^0/\rho}(t)\le C\,I_{11}^{1/2}+C\,,\qquad M_{\rho^0\theta^2}(t)\le\gamma\,I_1+C_\gamma I_{11}+C\,, \qquad (14)$$

где $\gamma-$ произвольное положительное число.

Доказательство аналогично [4].

Из (14) следуют оценки:

$$\overline{M}_{\rho^0/\rho}(t)\le C\,\bar{I}_{11}^{1/2}+C\,,\qquad \overline{M}_{\rho^0\theta^2}(t)\le\gamma\,\bar{I}_1+C_\gamma\bar{I}_{11}+C\,. \qquad (15)$$

Из второго уравнения системы (4) вытекает оценка: $0\le c\le1$.

Умножим второе уравнение системы (4) на $c(x,t)$. После интегрирования по $x\in R$ и по $t\in[0,T]$, с учетом условий теоремы, заключаем

$$\max_{0\le t\le T}\|\,c(t)\|^2+\int_0^T\!\!\int\left(\rho\,c_x^2+c^2g\right)dxdt\le N_7\,. \qquad (16)$$

Умножим второе уравнение системы (4) на $(\rho c_x)_x$ и проинтегрируем по R:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho c_x^2 dx + \int \left(\rho c_x\right)_x^2 dx = -\frac{1}{2}\int \rho^2 c_x^2 u_x dx + \int cg\left(\rho c_x\right)_x dx = I_1 + I_2. \quad (17)$$

Используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, вложения, липшицевость функции $g(\rho, c, \theta)$ по $\theta^{1/2}$ и (10), оценим интегралы в правой части (17). Полученное из (17) неравенство проинтегрируем по t и перейдем к пределу при $n \to \infty$. В итоге выводим

$$\int \rho\, c_x^2 dx + \int_0^t \int \left(\rho\, c_x\right)_x^2 dx d\tau \le N_8, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (18)$$

При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$M_{\rho^0/\rho} \le N_9, \quad \forall t \in [\,0, T\,]. \quad (19)$$

Докажем (19). В виду оценок (15), достаточно получить ограниченность $\bar{I}_{11}$. Докажем это. Уравнение (9) умножим на $\omega(x,t)$ и проинтегрируем по R:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\,\omega\,\|^2 + \mu\int \rho\omega_x^2\, dx + (\lambda - \mu)\int \rho\theta_x\omega_x\, dx + \int \beta(x)|u|^\alpha u^2\omega\, dx = \quad (20)$$

$$= r\int u\, \rho\theta\, \omega_x\, dx - \nu\int \rho^{3/2}\theta\, c_x\omega_x\, dx - (\chi - \mu)\int \rho\, c_x\omega_x\, dx.$$

Правая часть по неравенствам Юнга и Коши не превосходит величины

$$\varepsilon\int \rho\omega_x^2\, dx + C_\varepsilon\left(\int \rho\,\theta^2 u^2\, dx + \int \rho^2\theta^2 c_x^2 dx + \int \rho\, c_x^2 dx + 1\right),$$

где $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Рассуждая далее аналогично [2], по определению функции $\omega(x,t)$ имеем при $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$:

$$(\mu - \varepsilon)\omega_x^2 + (\lambda - \mu)\theta_x\omega_x \ge (\lambda - 2\varepsilon)\theta_x^2 - 2\left[\frac{1}{4}\varepsilon^{-1}(\mu + \lambda)^2 + \lambda + 2\mu + 2\varepsilon\right]\left(u^2 u_x^2 + c_x^2\right)$$

Поэтому, взяв $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{8}, \frac{\lambda}{8}\right)$, из (20) с учетом (13), (18) получим

$$\frac{d}{d\,t}\|\,\omega\|^2 + \frac{3\lambda}{2}\int \rho\theta_x^2\, dx \le C_1\left(\int \rho\theta^2 u^2\, dx + \int \rho\, u^2 u_x^2\, dx + \int \rho^2\theta^2 c_x^2\, dx + 1\right). \quad (21)$$

Если уравнение импульса системы (4) умножить на $u^3(x,t)$ и проинтегрировать по R, то придем к соотношению

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\| u\|_{4,R}^4 + 3\int \rho\, u^2 u_x^2\, dx + \int \beta(x)|u|^\alpha u^4\, dx = \tag{22}$$

$$= 3\int \rho\theta\, u^2 u_x\, dx \le \frac{3}{2}\int \rho\, u^2 u_x^2\, dx + \frac{3}{2}\int \rho\theta^2 u^2\, dx.$$

Умножая (22) на $\frac{2}{3}C_1$ и складывая с (21), с учетом (10), (13) заключаем

$$\frac{d}{d\,t}\left(\|\omega\|^2 + \alpha\| u\|_{4,R}^4 + \frac{3\lambda}{2}\bar{I}_{11}\right) \le C_2\, \overline{M}_{\rho^0\theta^2} + C_3, \qquad \alpha = \frac{1}{6}C_1.$$

С учетом (15) имеем неравенство:

$$\frac{d}{d\,t}\left(\|\omega\|^2 + \alpha\| u\|_{4,R}^4\right) + \frac{3\lambda}{2}\bar{I}_1 \le \gamma\, \bar{I}_1 + C_\gamma \bar{I}_{11} + C.$$

Выбирая γ достаточно малым и применяя неравенство Гронуолла, получим ограниченность функции $\bar{I}_{11}$, а следовательно, и оценку (19).

Используя полученные выше оценки, нетрудно получить оценки:

$$\max_{0\le t\le T}\|\theta(t)\|^2 + \int_0^T \left\|\sqrt{\rho}\theta_x\right\|^2 dt \le N_{10}, \qquad \int_0^T \left(\overline{M}_{\rho^0\theta^2}(t) + \overline{M}_{\rho^0\theta}(t)\right)dt \le N_{11}.$$

$$\int_0^T \int \beta(x)|u|^\alpha u^4\, dxdt \le N_{12}.$$

Из третьего уравнения системы (4), после умножения на $u(x,t)$, интегрирования по (x,t) и некоторых преобразований выводятся оценки

$$\max_{0\le t\le T}\| u(t)\|^2 + \int_0^T \left\|\sqrt{\rho}\, u_x\right\|^2 dt + \int_0^T \int \beta(x)|u|^\alpha u^2 dxdt \le N_{13}.$$

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$\max_{0\le t\le T}\left\| \rho_x(t)\rho^{-1}(t)\right\| \le N_{14}. \tag{23}$$

Доказательство. Дифференцируя (7) по x, имеем [2]:

$\rho_x(x,t)/\rho(x,t) = A(x,t) +$

$$+\rho(x,t)B^{-1}(x,t)Y^{-1}(t,x_0)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho^0(x)}\right)-\int_0^t B(x,\tau)Y(\tau,x_0)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+\theta A\right)(x,\tau)d\tau\right\}$$

где $A(x,t)=u_0(x)-u(x,t)$.

Возьмем нормы в $L_2(R)$от обеих частей. С учетом условий теоремы, (13), (16), (18), (19), оценим правую часть. После некоторых преобразований выводим оценку (23).

С учетом (13), (16), (18), (19) из (17) и второго уравнения системы (4) вытекает

$$\max_{0\le t\le T}\|c_x(t)\|^2+\int_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho^0}c_{xx}(t)\right\|^2+\|c_t(t)\|^2\right)dt\le N_{15}.$$

При выполнении условий теоремы справедливо неравенство

$$\max_{0\le t\le T}\|u_x(t)\|^2+\int_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho^0}u_{xx}(t)\right\|^2+\|u_t(t)\|^2\right)dt\le N_{16}. \qquad (24)$$

Запишем уравнение импульса в развернутом виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\rho}{\partial x}\theta-\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}-\beta(x)|u|^\alpha u$$

и, умножив на u_{xx}, проинтегрируем по R.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2+\int\rho u_{xx}^2dx=\int\left(\rho_x\theta u_{xx}+\rho\theta_x u_{xx}-\rho_x u_x u_{xx}-\beta(x)|u|^\alpha u\,u_{xx}\right)dx \qquad (25)$$

Оценим интегралы в правой части (25), учитывая (13), (19):

$$I_1=\int|\rho_x\theta u_{xx}|dx\le\left(\int\frac{\rho_x^2}{\rho^2}dx\right)^{1/2}\left(\int\frac{\rho^0}{\rho^0}\rho^2\theta^2u_{xx}^2dx\right)^{1/2}\le\delta_1\int\rho u_{xx}^2dx+C_{\delta_1}\overline{M}_{\rho^0\theta^2}$$

$$I_2=\int|\rho\theta_x u_{xx}|dx\le\delta_2\int\rho u_{xx}^2dx+C_{\delta_2}\int\rho\theta_x^2dx,$$

$$I_3=\int|\rho_x u_x u_{xx}|dx\le(\delta_3+C\delta_4)\int\rho u_{xx}^2dx+C\int\rho u_x^2dx,$$

$$I_4=\int\left|\beta(x)|u|^\alpha u\,u_{xx}\right|dx\le\left(\int\rho u_{xx}^2dx\right)^{1/2}\left(\int\frac{\rho^0}{\rho}\frac{\beta(x)}{\rho^0}\beta(x)|u|^{2(\alpha+1)}dx\right)^{1/2}\le$$

$$\leq \delta_5 \int \rho u_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} C_{\delta 5} \int \beta(x) |u|^{\alpha} u^4 dx + \frac{1}{2} C_{\delta 5} \left(\int |u|^2 dx \right)^{3\alpha/2} \left(\int (\beta(x))^{\frac{2}{2-3\alpha}} dx \right)^{(2-3\alpha)/2} \leq$$

$$\leq \delta_5 \int \rho u_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} C_{\delta 5} \int \beta(x) |u|^{\alpha} u^4 dx + C.$$

В итоге из (25) находим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_x \|^2 + \int \rho u_{xx}^2 dx \leq$$

$$\leq (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + C\delta_4 + \delta_5) \int \rho u_{xx}^2 dx + C \left[\int \rho u_x^2 dx + \int \rho \theta_x^2 dx + \overline{M}_{\rho^0 \theta^2} + 1 \right].$$

Выбирая $\delta_i > 0 \left(i = \overline{1,4} \right)$ из условия $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + C\delta_4 + \delta_5 < 1$ и интегрируя последнее неравенство по t с учетом полученных ранее оценок, заключаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u_x(t) \|^2 + \int_0^T \int \rho u_{xx}^2 dx\, dt \leq N_{17}.$$

Используя уравнение импульса, выводим утверждение (24).

Умножая уравнение теплопроводности системы (4) на θ_{xx}, после некоторых преобразований можно получить оценку

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\theta_x\|^2 + \int_0^T \left(\left\| \sqrt{\rho^0} \theta_{xx} \right\|^2 + \| \theta_t \|^2 \right) dt \leq N_{18}.$$

Доказательство предельного перехода осуществляется так же как в пунктах [2, 4].

Теорема полностью доказана.

Литература

1. ***Бай Ши.*** Магнитная газодинамика и динамика плазмы [Текст] / Ши Бай – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. ***Антонцев, С. Н.*** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей [Текст] / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов – Новосибирск : Наука, 1983. – 319 с.

3. ***Есекеев, К. Б.*** О задаче Коши для уравнений нестационарного течения реагирующей смеси газов [Текст] / К.Б. Есекеев, М.Ж. Есекеева, Д.А. Искендерова // Новосибирск: Наука, 1997. – № 7. – С.178–180.
4. ***Смагулов, Ш. С.*** Математические вопросы модели магнитной газовой динамики [Текст] / Ш.С. Смагулов, Д.А. Искендерова – Алматы : Гылым, 1997. – 166 с.