УДК 517.957

# ОПТИМАЛДУУ БАШКАРУУНУН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕЛЕРИ

*Токторбаев Айбек Мамадалиевич*, *ф.-м.и.к., доцент*
*ain7@list.ru*
*Ош мамлекеттик университети, Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.*** *Жумушта оптималдуу башкаруунун сингулярдуу козголууга ээ маселеси каралат. Ылдам жана жай өзгөрүүчү өзгөрмөлөрдүн оптималдуу башкаруудагы чектөөлөрүү көрсөтүлөт. Чек аралык катмардагы жана регулярдык аймакта пайда болуучу башкаруунун өзгөчөлүктөрү каралат. Жыйынтыгында функционал түзүлөт жана ал максимум принцибине таянуу менен изилденет. Чек аралык катмар курама ажыралмалар усулуна негизделип изилденет. Маселени изилдөөнү тактоо максатында козголууга ээ болбогон маселени оптималдуу башкарууга изилдөө жараяны конкреттүү мисалды келтирүү менен каралат. Бул учурда Понтрягиндин максимум принцибин колдонуунун өзгөчөлүгү эске алынды. Аны сингулярдык маселеге колдонууда кандай шарттарда орун алары да көрсөтүлдү.*

***Ачкыч сөздөр****: Сингулярдуу козголуу, оптималдуу башкаруу, чек аралык катмар, ички жана сырткы чечим, курама ажыралмалар усулу, максимум принциби.*

# СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Токторбаев Айбек Мамадалиевич, к.ф.-м.н., доцент*
*ain7@list.ru*
*Ошский государственный университет,*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.*** *В работе рассматривается сингулярно возмущенная задача оптимального управления. Показаны оптимальные ограничения на управление, накладываемые на быстро и медленно меняющиеся переменные. Рассмотрены особенности оптимального управления в регулярной и граничной областях. В итоге составим функционал, и исследуем его на основе принципа максимума. Пограничный слой исследуется с помощью метода составного разложения. Для уточнения исследования на конкретном примере исследуется теория оптимального управления* *для невозмущенной задачи. Учтено применение особенностей принципа максимума Понтрягина к исследованию сингулярной задачи оптимального управления.*

***Ключевые слова:*** *Сингулярные возмущения, оптимальное управление, пограничный слой, внешние и внутренние решения, метод составных разложений, принцип максимума.*

## OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS OF THE OPTIMALMANAGEMENT

*Toktorbaev Aybek Mamadalievich*
*candidate of physical and mathematical sciences, docent*
*ain7@list.ru*
*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan,*

***Abstract.*** *The paper considers a singularly perturbed optimal control problem. Optimal control constraints imposed on rapidly and slowly varying variables are shown. The features of optimal control in regular and boundary domains are considered. As a result, we will compose a functional and study it based on the maximum principle. The boundary layer is studied using the composite decomposition method. To clarify the study on a specific example, the theory of optimal control for the unperturbed problem is investigated. The application of the features of the Pontryagin maximum principle to the study of a singular problem of optimal control is taken into account.*

***Keywords:*** *Singular perturbations, optimal control, boundary layer, external and internal solutions, method of composite expansions, maximum principle.*

**Киришүү.** Оптималдуу башкаруу маселелеринде козголуунун кездешүүсү, математикалык моделде кичине параметрдин болуусу менен тыгыз байланышта. Мына ошол себептүү кээде оптималдуу башкаруу маселелеринде сингулярдуу козголууларды кездештирүүгө болот.

Сингулярдуу козголууга ээ болгон оптималдуу башкаруунун маселелери туунду алдында кичине параметр кармаган дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлөт. Козголбогон теңдеменин тартиби козголгон теңдеменин тартибинен төмөн болуусу негизги өзгөчөлүк катары бааланат. Козголбогон маселе, козголгон маселеге коюлган бардык шарттарды канаатандыра албайт.

Жумушта оптималдуу башкаруунун маселеси фиксирленген $[0,T]$ аралыгында сызыктуу система үчүн каралат. Изилдөөнүн максаты катары кичине параметрдин каалаган даражасындагы тактыкта маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасын тургузуу болуп саналат.

**Маселенин коюлушу.** Бөлүкчө-үзгүлтүксүз башкаруулар классында ыкчам жана жай өзгөрүлмөлүү оптималдуу башкаруунун маселеси

$$x'(t,\varepsilon) = a_{11}x(t,\varepsilon) + a_{12}y(t,\varepsilon) + b_1u(t),$$

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = a_{21}x(t,\varepsilon) + a_{22}y(t,\varepsilon) + b_2u(t), \tag{1}$$

$$t \in [0,T], \quad \|u(t)\| \le 1, \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \quad y(0,\varepsilon) = y^0,$$

$$\sigma(x(T,\varepsilon)) \to \min_{\|u(t)\|\le 1} \sigma(x(T,\varepsilon)) =: w(T, x^0, y^0, \varepsilon).$$

Мында $0 < \varepsilon$ - кичине параметр; жай өзгөрүлмө $x \in R^2$, ал эми ыкчам өзгөрүлмө $y \in R^2$, $u(\cdot) \in R^2$, $a_{ij}$, $b_i$, $i, j = 1,2$ дал келүүчү ченемдеги турактуу чыныгы сан.

Чыныгы бөлүк

$$\operatorname{Re} a_{22} \le -\lambda,\ \lambda > 0 \tag{2}$$

ал эми $\sigma(x(t,\varepsilon))$ - чексиз дифференцирленүүчү күчтүү туюк кофиниттик функция. Тактап айтканда $\forall x \in R^2, \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1}\tau(\lambda x) = +\infty.$ Ушул эле шарттарда $\sigma^*(x(t,\varepsilon))$ функциясы $R^2$ чексиз дифференцирленүүчү, күчтүү туюк кофиниттик функция.

Белгилөөлөрдү кийирели

$$a_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{1}{\varepsilon}a_{21} & \frac{1}{\varepsilon}a_{22} \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{1}{\varepsilon}b_2 \end{pmatrix}.$$

Формалдуу $\varepsilon = 0$ деп алуу менен козголбогон маселеге ээ болобуз:

$$x_0'(t,\varepsilon) = a_0x_0(t,\varepsilon) + b_0u, \quad t \in [0,T], \quad \|u(t)\| \le 1, \quad x(0,\varepsilon) = x^0,$$

$$a_0 = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}, \quad b_0 = b_1 - a_{12}a_{22}^{-1}b_2, \tag{3}$$

$$\sigma(x_0(t,\varepsilon)) \to \inf_{\|u\|\le 1} \sigma(x(t,\varepsilon)) = \omega_0(t,x_0)\,.$$

Убакыттын $t$ моментиндеги жетишүү көптүгү $E_\varepsilon = E_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ болсун. Ал эми бул көптүктүн таяныч функциясы $\rho(\bullet, E)$. Анда [2] негизинде

$$\omega_\varepsilon(t, x^0, y^0) = -\inf_{r_\varepsilon^x \in R^2}\left(\sigma^*(r_\varepsilon^x) + \rho(-r_\varepsilon^x; npE_\varepsilon)\right).$$

Мында $npE_\varepsilon$ -(1) системанын жетишүү көптүгү $E_\varepsilon$ проекциясы.

Козголбогон маселе үчүн аналогиялуу түрдө

$$\omega_0(t, x^0) = -\inf_{r_0 \in R^2}\left(\sigma^*(r_0) + \rho(-r_0; E_0)\right).$$

Бул жерде $E_0 = E_0(T, x^0)$ - (3) системанын убакыттын $T$ моментиндеги жетишүү көптүгү. $E_0$, $npE_\varepsilon$ көптүктөрүн жана алардын таяныч функциялары [2]

$$\rho(-r_\varepsilon^x, npE_\varepsilon) = \sup_{x_\varepsilon \in npE_\varepsilon} \left\langle x_\varepsilon, -r_\varepsilon^x \right\rangle = \rho\left(-\begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}; E_\varepsilon\right).$$

Андан сырткары Коши барабардыгынын негизинде

$$E_\varepsilon(T, x^0, y^0) = \left\{ e^{a_\varepsilon t}\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int_0^T e^{a_\varepsilon (T-t)} B_\varepsilon u(t)dt : \|u(t)\| \le 1 \right\},$$

мына ошондуктан таяныч функциясы

$$\rho\left(-\begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}; E_\varepsilon\right) = -\left\langle e^{a_\varepsilon T}\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle + \int_0^T \left\| B_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^* t}\begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}\right\| dt\,.$$

Козголбогон маселенин таяныч функциясы

$$\rho(-r_0, E_0) = -\left\langle e^{a_0 T} x^0, r^0 \right\rangle + \int_0^T \left\| B_0^* e^{a_0^* t} r_0 \right\| dt\,.$$

Козголгон (1) системага максимум принцибин колдонсок, анда түйүндөш системага ээ болобуз.

$$\psi_\varepsilon^{'} = -a_\varepsilon^* \psi_\varepsilon\,. \tag{4}$$

Мында $\psi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \psi_\varepsilon^x \\ \psi_\varepsilon^y \end{pmatrix}$, $\psi_\varepsilon^x \in R^2$, $\psi_\varepsilon^y \in R^2$. Чек аралык шарттар

$$\begin{pmatrix} \psi_\varepsilon^x(T) \\ \psi_\varepsilon^y(T) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \nabla_x \sigma(x^{opt}(T,\varepsilon) \\ \nabla_y \sigma\left(y^{opt}(T,\varepsilon)\right) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ал эми оптималдуу башкаруу $u_\varepsilon^{opt}(t)$

$$\left\langle \psi_\varepsilon(t), b_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}(t) \right\rangle = \max_{\|\vartheta\|\le 1} \left\langle \psi_\varepsilon(t), b_\varepsilon \vartheta \right\rangle. \tag{6}$$

Мында $\nabla_x \sigma(\bullet)$, $\nabla_y \sigma(\bullet)$ - $\sigma(\bullet)$ - функциясынын тиешелүү өзгөрүлмөлөр боюнча алынган градиенти.

Түйүндөш система үчүн

$$\begin{pmatrix} \psi_\varepsilon^x(t) \\ \psi_\varepsilon^y(t) \end{pmatrix} = -e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix} \ne 0,$$

болсо, оптималдуу башкаруу

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = -\frac{b_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| b_\varepsilon^* e^{a_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}.$$

Белгилөөлөрдү кийирүү менен

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{U_\varepsilon^*(T-t) r_\varepsilon}{\left\| U_\varepsilon^*(T-t) r_\varepsilon \right\|},$$

мында $U_\varepsilon(t) = z_\varepsilon^{11}(t) b_1 + \dfrac{1}{\varepsilon} z_\varepsilon^{12}(t) b_2$, $e^{a_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} z_\varepsilon^{11}(t) & z_\varepsilon^{12}(t) \\ z_\varepsilon^{21}(t) & z_\varepsilon^{22}(t) \end{pmatrix}$, $r_\varepsilon^x = r_\varepsilon$.

Дал келүүчү оптималдуу траектория үчүн

$$\begin{pmatrix} x^{opt}(t,\varepsilon) \\ y^{opt}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = e^{a_\varepsilon t} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{a_\varepsilon(t-s)} b_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}(s) ds.$$

Матрицалык экспонентанын асимптотикасын чек аралык катмарда изилдейли. Анда $t \in [0,T]$ аралыгында

$$z_\varepsilon^{ij}(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( z_k^{ij}(t) + \Pi_k z^{ij}(\tau) \right), \quad t \in [0,T], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Алынган (7) барабардыкта ар бир кошулуучу [2] аныкталат.

Баштапкы жакындашуулар

$$z_0^{11}(t)=e^{a_0 t}\,,\quad z_0^{12}(t)=0\,, \Pi_0 z^{11}(\tau)\equiv 0\,,\quad \Pi_0 z^{12}(t)\equiv 0\,,$$

$$z_0^{12}(t)=-a_{22}^{-1}a_{21}e^{a_0 t}\,,\ z_0^{22}(t)\equiv 0\,, \tag{8}$$

$$\Pi_0 z^{21}(\tau)=e^{a_{22}\tau}a_{22}^{-1}a_{21}\,,\ \Pi_0 z^{22}(\tau)=e^{a_{22}\tau}\,.$$

Туруктуулуктун (2) шартын эске алуу менен (8) барабардыктан $\exists C>0 \quad \left\|e^{a_{22}\tau}\right\|\le C\exp(-\alpha\tau)$ , $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ , экендигин эске алсак, анда $t\in[\mu,T]$ аралыгында ички чечим, ал эми калган $t\in[0\mu)$ аралыгы үчүн жалпы учурда $z_\varepsilon^{ij}(t)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(z_\varepsilon^{ij}(\varepsilon\tau)+\Pi_k z^{ij}(\tau))$ ажыралмасына ээ болобуз. Мында $ij=1{,}2$ .

Жалпысынан алганда экспоненталык матрица [1] маселенин чечими изилденүүчү аймакты аныктайт. Чек аралык функциялар усулунун негизинде каралуучу аралыкта бир калыптагы чечим алынат.

Калган интеграл астындагы функциялардын асимптотикасын [2] аналогия түрүндө аныктап алууга болот.

Мисал катары рангы экиге барабар болуучу турактуу матрицаларды алалы. Анда $a_{11}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ , $a_{12}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ , $b_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ , $a_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ , $a_{22}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ деп алуу менен изилдеп көрүүгө болот.

**Корутунду.** Жумушта эң жөнөкөй оптималдуу башкаруунун сингулярдуу козголгон маселелери каралды. Анда (4)-(6) барабардыктары менен аныкталуучу максимум принцибине таянуу менен аныкталары келип чыгат. Чек аралык катмар чек аралык катмар функциясын [1] пайдалануу менен изилденди. Сингулярдуу козголгон мындай маселелери [2] менен чечилген. Белгилей кетчү нерсе оптималдуу башкаруунун бисингуляр маселеси толук кандуу изилдене элек. Мына ошол себептүү ал маселени изилдөөнүн алгачкы кадамы катары бул жумушту атоого болот.

**Адабияттар**


1. ***Васильева, А. Б.*** Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравненийс малыми параметрами при старших производных [Текст] / А.Б. Васильева // Журнал вычислительной математики и математической физики. - М. 1963.
2. ***Парышева, Ю. В.*** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления [Текст] / Дисс. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Екатеринбург. 2012. – С. 9-92.