УДК 517.928

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТИ БАР БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫН ТУРГУЗУУ

Дадажанова Гуласал Алимжановна, окутуучу, 2019gda2015@gmail.com
Абсатар кызы Айдана, окутуучу, absatarovamyrzaiym@gmail.com
Б.Сыдыкова атындагы Кыргыз-Узбек эл аралык университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Бул жумушта изилдөөнүн предмети болуп сингулярдуу козголгон бир тектүү эмес алсыз сызыктуу дифференциалдык теңдемелер эсептелинет. Изилдөөнүн максаты сингулярдуу козголгон бир тектүү эмес алсыз сызыктуу дифференциалдык теңдеме чечимин асимптотикасын тургузуу болуп эсептелинет. Чечимдин асимптотикасын тургузууда классикалык асимптотикалык усул – козголуулар усулунан пайдаланылды. Анын жардамында сызыктуу жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин чечимин тургузуу салыштырмалуу оңой. Макалада* $\varepsilon y'(t,\varepsilon) = -ty(t,\varepsilon) + f(t)$, *теңдемеси каралып,* ε дун *мааниси* $0<\varepsilon<1$ *болгон учурда дифференциалдык теңдеме алсыз сызыктуу кадимки дифферециалдык теңдеме болот. Теңдемеде кичине параметрден аналитикалык түрүндө көз каранды болгону үчүн, анын чечими да кичине параметр боюнча аналитикалык функция болот. Башкача айтканда калдык мүчөсү бар Тейлордун катарына ажырайт. Козголуу методунун классикалык теориясына Анри Пуанкаре чоң салым кошуп, алгычкы аныктаманы берген. Сингулярдуу козголгон теңдеменин чечимин асимптотикасын тургузуу колдонмо изилдөөлөрдө чоң мааниге ээ болуп, алар физика, техника, суюктуктар жана газдар механикасы көп изилденет.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу козголгон, алсыз козголгон, өзгөчө чекит, асимптотика.*

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Дадажанова Гуласал Алимжановна, преподаватель, 2019gda2015@gmail.com
Абсатар кызы Айдана, преподаватель, absatarovamyrzaiym@gmail.com
Кыргызского-Узбекского Международного университета
имени Б.Сыдыкова, Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Предметом исследования является сингулярно возмущенное однородное слабо линейное дифференциальное уравнение. Целью исследования является нахождение асимптотики решения сингулярно возмущенного однородного слабо линейного дифференциальное уравнения. Для построения асимптотики был использован классический асимптотический метод – метод возмущений. На основе данного метода сравнительно легко можно определить приближенные решения как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений, зачастую и уравнений в частных производных. В статье рассматривается уравнение вида* $\varepsilon y'(t,\varepsilon) = -ty(t,\varepsilon) + f(t)$, *где при* $0 < \varepsilon < 1$ *значения* ε *дифференциальное уравнение переходит в слабо линейное обыкновенное уравнение. Если уравнение зависящее от малого параметра аналитически, то и решение будет представлено через аналитические функции. Иначе говоря, разлагается в ряд Тейлора с остаточным членом. В развитие классической теории возмущений большой вклад внес Анри Пуанкаре, давший начальное определение. Построение асимптотики сингулярно возмущенного уравнения имеет прикладной характер, в таких отраслях науки как: физика, техника, течение жидкости и газа.*

Ключевые слова: *сингулярно возмущенный, слабо возмущенный, точка поворота.*

CONSTRUCTION OF THE ASYMPTOTICS OF A SINGULARLY PERTURBED FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SINGULAR POINT

Dadazhanova Gulasal Alimjanovna, teacher, 2019gda2015@gmail.com
Absatar kyzy Aidana, teacher, absatarovamyrzaiym@gmail.com
Kyrgyz-Uzbek International University named after B. Sydykova,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The subject of the article is a singularly perturbed homogeneous weakly linear differential equation. The purpose of the article is to find the asymptotics solving a singularly perturbed homogeneous weakly linear differential equation. To construct asymptotic, a classic asymptotic method was used - the perturbation method. Based on this method, the approximate solutions of both linear and nonlinear differential equations, and equations in private derivatives can be relatively easily. The article discusses the equation of*

the form $\varepsilon y'(t,\varepsilon) = -ty(t,\varepsilon) + f(t)$, *where* $0<\varepsilon<1$, *with the value of* ε, *the differential equation goes into a weakly linear ordinary equation. If the equation depends on the small parameter analytically, the solution will be presented through analytical functions. In other words, decomposes into a series of Taylor with a residual member. In the development of the classical perturbation theory, Henri Poincare, who gave an initial definition was made to the development of the classical perturbation theory. The construction of asymptotics of a singularly perturbed equation is applied, in such branches of science as: physics, technique, fluid flow and gas.*

Key words*: singularly perturbed, weakly indignant, turning point.*

1. Алгач төмөнкү маселени карайбыз

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = -ty(t,\varepsilon) + f(t), t \in R_+, \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

мында $f(t) \in C^\infty(R_+),\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k, f_0 \neq 0, y^0 - const.$

t =0 болгондо асимптотикалык туруктуулук бузулат.

Козголбогон

$$-t\tilde{y}(t) + f(t) = 0$$

теңдеменин чечими

$$\tilde{y}(t) \quad = \frac{f(t)}{t}. \tag{3}$$

(3) чечим $t = 0$, чекитинде чексизге айланат

(1)-(2) чечимин төмөнкүдөй издейбиз:

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k(\tau), \tau = \frac{t}{\mu}, \mu^2 = \varepsilon. \tag{4}$$

(4) тү (1) ге койсок :

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v'(t) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k{}'(\tau) =$$

$$= -t \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t) - \tau \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k(\tau) + f(t).$$

бул барабардыктын эки жагына $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k$, ны кошобуз, h_k азырынча аныкталган эмес бир аз өзгөрткөндөн кийин төмөнкү теңдемелерди алабыз

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v'(t) = -t \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t) + f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k, \quad (5)$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k{}'(\tau) = -\tau \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \pi_k(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k. \quad (6)$$

(5) тен биз төмөнкүнү алабыз

$$-tv_0(t) + f(t) - h_0 = 0;$$

$$v'_{k-1}(t) = -tv_k(t) - h_k, \qquad k \in N.$$

Мындан

$$v_0(t) = (f(t) - h_0)/t;$$

$$v_k(t) = -(v'_{k-1}(t) + h_k)/t, \; k \in N.$$

Белгисиз коэффициенттер h_k, $v_k(t), k = 0, 1, \ldots$ функциялар жылма функциялар болгондой кылып тандап алабыз

$$.h_0 = f_0, h_k = -v'_{k-1}(0), \; k \in N.$$

Мындай тандасак

$$v_0(t) = (f(t) - f_0)/t \quad (7)$$

$$v_k(t) = -v'_{k-1}(t) - v'_{k-1}(0))/t, \;\; k \in N. \quad (8)$$

Мындай тандоодо бардык функциялар $v_k(t)\,, k = 0, 1, \ldots$

үзгүлтүксүз, жылма функциялар болушат. Бул сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t)$$

(1)-(2) асимптотиканын регулярдуу бөлүгү болуп калат.

(6) дан

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+1} \left(\pi_k{}'(\tau) + \tau \pi_k(\tau)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k} h_k,$$

же

$$\pi_{2k-1}{}'(\tau) + \tau \pi_{2k-1}(\tau) = h_k,$$

$$\pi_{2k}{}'(\tau) + \tau \pi_{2k}(\tau) = 0, k = 0,1,2 \ldots$$

(2) эске алсак, анда:

$$\frac{d\pi_0(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_0(\tau) = 0,\ \pi_0(0) = y^0 - v_0(0); \tag{9}$$

$$\frac{d\pi_{2k}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k}(\tau) = 0,\ \pi_{2k}(0) = -v_k(0),\ k = 1,2,\dots; \tag{10}$$

$$\frac{d\pi_{2k-1}(\tau)}{d\tau} + \tau\pi_{2k-1}(\tau) = h_k,\ \pi_{2k-1}(0) = 0. \tag{11}$$

Бул маселердин бир гана чечими бар :

$$\pi_0(\tau) = \left(y^0 - v_0(0)\right)e^{-\tau^2/2}; \tag{12}$$

$$\pi_{2k}(\tau) = -v_k(0)e^{-\tau^2/2},\ k = 1,2,\dots; \tag{13}$$

$$\pi_{2k-1}(\tau) = h_k e^{-\tau^2/2}\int_0^\tau e^{s^2/2}\,ds,\ k = 0,1,2,\dots\ . \tag{14}$$

Демек биз (1)-(2) нин формалдуу чечимин (4) түрүндө тургуздук. (4) катардын асимптотикалык катар экендигин далилдеш үчүн, калдык үчүн

$$R_n(t,\varepsilon) = y(t,\varepsilon) - y_n(t,\varepsilon),$$

$$\varepsilon R_n'(t,\varepsilon) = -tR_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}v_{n+1}'(t,\varepsilon), t > 0, \tag{15}$$

$$R_n(0,\varepsilon) = 0. \tag{16}$$

бул маселенин бир гана чечими болот

$$R_n(t,\varepsilon) = -\varepsilon^n e^{-t^2/(2\varepsilon)}\int_0^t v_{n+1}'(s,\varepsilon)e^{s^2/(2\varepsilon)}ds$$

жана анын баалосу

$$|R_n(t,\varepsilon)| \le C_n\varepsilon^{n+1/2}$$

Демек, биз төмөнкүдөй теореманы далилдедик.

Теорема. (1) теңдеменин чечиминин асимптотикасы (4) катар түрүндө алынат.

Бул теореманы төмөнкү система

$$\varepsilon y'(t) = -Aty(t) + f(t),$$

мында

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \det A \neq 0$$

$$f(t)=\left(f_1(t), f_2(t),\dots, f_n(t)\right)\in C^{\infty}(R_+)$$

үчүн дагын далилдесе болот.

Өзгөчө Лайтхилл түрүндөгү биринчи жана экинчи тартиптеги теңдемелери үчүн жалпыланган чекара усулу [1], кеңейтүү усулу [2] жана униформизациялоо усулдарын колдонсо болот.

Корутунду

1. *Өзгөчө чекити бар сингулярдуу сызыктуу жана алсыз сызыктуу дифференциалдык теңдеменин асимптотикасы тургузулду.*
2. *Асимптотикалык катардын калдык мүчөсү бааланды.*

Адабияттар

1. ***Alymkulov, K***. A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. - Moscow, 2012. - № 6. - Pp. 117-121.
2. ***Alymkulov, K.*** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) - 2015. - Volume 3. - Pp. 54-64.
3. ***Tursunov, D. A.*** Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient / D. A. Tursunov, M. O. Orozov, A. A. Halmatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, No. 6. – P. 1115-1122. – DOI 10.1134/S1995080220060177. – EDN AZKBTQ.
4. ***Halmatov, A. A.*** Construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed nonlinear equation with a singular point / A. A. Halmatov, A. A. Baltabaeva, K. G Kanybek // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 34-40. – DOI 10.54834/16945220_2021_3_34. – EDN LWIYNU.
5. ***Halmatov, A. A.*** Construction of the asymptotic of the solution of a singularly perturbed partial differential equation with a special Lin / A. A. Halmatov, N. Nishanbaeva, K. A

Absatar // Science. Education. Engineering. – 2021. – No. 3(72). – P. 29-33. – DOI 10.54834/16945220_2021_3_29. – EDN UHGWZY.

6. ***Khalmatov, A. A.*** Analysis of finding a solution to modular equations when the equation contains two or more modules / A. A. Khalmatov, G. A. Dadazhanova, K. A. Abbazova, N. Sayfiddin K // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 49-57. – DOI 10.54834/16945220_2022_3_49. – EDN JQQTXH.
7. ***Khalmatov, A. A.*** Spice of solutions to singularly perturbed equations / A. A. Khalmatov, K. A. Abbazova, G. Kanybek K, A. Baltabaev // Science. Education. Engineering. – 2022. – No. 3(75). – P. 57-63. – DOI 10.54834/16945220_2022_3_57. – EDN QCRAZR.
8. ***Бабаев, Д. Б.*** Санариптештирүү шартында техникалык жождордогу жалпы физика курсунун орду / Д. Б. Бабаев, Ш. К. Хаитов, А. А. Халматов // Alatoo Academic Studies. – 2020. – No. 3. – P. 84-89. – DOI 10.17015/aas.2020.203.09. – EDN TEHYXP.