УДК 519.852.3
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_22

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ-БЕЛЛМАНА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Таирова Орозгул Каныбековна, преподаватель
tairova.orozgul@mail.ru
Баткенский государственный университет
Баткен, Кыргызстан
Эрмекбаева Айжана Турдубековна, к.ф.-м.н., доцент
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *При решении задачи оптимального управления процессами различают случаи программного оптимального управления и синтез оптимального управления. При программном управлении оптимальное управление определяется как функция независимых переменных задачи. При таком подходе исследования проводились на основе принципа максимума (случай обыкновенных дифференциальных уравнений – принцип Л.С. Понтрягина, в случае систем с распределенными параметрами принцип максимума типа Понтрягина, А.Г. Бутковский, А.И. Егоров, Т.К. Сиразетдинов, В.И. Плотников) [1]. Задачи управления, где требуется синтезировать оптимальное управление, решаются в основном методом динамического программирования, в основе которого лежит принцип оптимальности Беллмана. В этом случае искомое оптимальное управление следует находить как функцию (или функционал) от независимых переменных задачи и состояния управляемого процесса.*

Ключевые слова: *функционал, дифференциал Фреше, обобщенное решение, задача синтеза, функция Дирака.*

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕССТЕРИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМИЗАЦИЯЛООДО КОШИ-БЕЛЛМАНДЫН МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИЛҮҮСҮ

Таирова Орозгул Каныбековна, окутуучу
tairova.orozgul@mail.ru
Баткен мамлекеттик университети
Баткен, Кыргызстан
Эрмекбаева Айжана Турдубековна, ф.-м.и.к., доцент
aijana.ermekbaeva@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Процессти оптималдуу башкаруу маселесин чечүүдө программалык оптималдуу башкаруунун жана оптималдуу башкаруунун синтезинин учурларынын ортосунда айырмалоо жүргүзүлөт. Программалык башкарууда оптималдуу башкаруу маселенин көз карандысыз өзгөрмөлөрүнүн функциясы катары аныкталат. Бул ыкма менен изилдөө максимум принциптин негизинде жүргүзүлгөн (кадимки дифференциалдык теңдемелерде – Л.С. Понтрягин принциби, бөлүштүрүлгөн параметрлери бар системаларда Понтрягин тибиндеги максимум принциби, А.Г. Бутковский, А.И. Егоров, Т.К. Сиразетдинов, В.И. Плотников) [1]. Оптималдуу башкарууну синтездөө зарыл болгон башкаруу маселелери негизинен Беллман оптималдуу принцибине негизделген динамикалык программалоо ыкмасы менен чечилет.Мында каалаган оптималдуу башкаруу маселенин көз карандысыз өзгөрмөлөрүнүн функциясы (же функционалдуу) жана башкарылуучу процесстин абалынын катары табылышы керек.*

Ачкыч сөздөр: *функционал, Фреше дифференциалы, жалпыланган чечим, синтез маселеси, Дирак функциясы.*

ON THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY-BELLMAN PROBLEM FOR NONLINEAR OPTIMIZATION OF OSCILLATORY PROCESSES

Tairova Orozgul Kanybekovna, teacher
tairova.orozgul@mail.ru
Batken State University
Batken, Kyrgyzstan
Ermekbaeva Ayzhana Turdubekovna, Candidate of Ph.-Math. Sc., Docent
Osh State University
aijana.ermekbaeva @mail.ru
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *When solving the problem of optimal process control, a distinction is made between the cases of programmatic optimal control and the synthesis of optimal control. In program control, optimal control is defined as a function of the independent variables of the problem. With this approach, research was carried out based on the maximum principle (in the case of ordinary differential equations – L.S. Pontryagin's principle, in the case of systems with distributed parameters, the maximum principle of Pontryagin type, A.G. Butkovsky, A.I. Egorov, T.K. Sirazetdinov, V.I. Plotnikov) [1]. Control problems where it is necessary to synthesize optimal control are solved mainly by the dynamic programming method, which is based on the Bellman optimality principle. In this case, the desired optimal control should be found as a function (or functional) of the independent variables of the problem and the state of the controlled process.*
Key words: *Functional, Frechet differential, generalized solution, synthesis problem, Dirac function.*

Введение.

В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза точечного оптимального управления при нелинейной оптимизации колебательного процесса, описываемого линейным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных с интегральным оператором Фредгольма [2]. Найдено достаточное условие разрешимости задачи синтеза, в частности разработан алгоритм построения оптимального управления, осуществляющий синтез. При этом были исследованы вопросы разрешимости матричных и линейных дифференциальных уравнений бесконечномерного порядка.

1. Краевая задача управляемого колебательного процесса

Рассмотрим краевую задачу

$$V_{tt}(t,x)=V_{xx}(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0\right)f[u(t)],\ \left(t,x\right)\in Q \qquad (1)$$

с начальными

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x),\ \ 0<x<1 \qquad (2)$$

и граничными

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \ 0<t\le T \qquad (3)$$

условиями, где $V=V(t,x)$, определенная в области $Q=\{(0,1)\times(0,T)\}$, является искомой функцией; $K\left(t,\tau\right)$ – заданная функция

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty,$$

$x_0 \in (0,1)$ - точка приложения внешнего воздействия $f[u(t)] \in H(0,T)$, $u(t) \in H(0,T)$- управление; относительно функции $f[u(t)]$ будем считать, что она нелинейна и монотонна по функциональной переменной $u(t)$, т.е.

$f_u(u(t)) \neq 0, \ \ t \in (0,T)$;

$\delta(x)-$ дельта-функция Дирака; $\psi_1(x) \in H_1(0,1), \psi_2(x) \in H(0,1)-$ функции начального состояния управляемого процесса; $\lambda-$ параметр, $\alpha > 0, T$ - фиксированный момент времени.

2. Обобщенное решение краевой задачи

В условиях рассматриваемой задачи управления краевая задача не может иметь классического решения. В этой связи исследование будем проводить с использованием понятия обобщенного решения.

Определение. *Под обобщенным решением краевой задачей (1)-(3)* будем понимать функцию $V(t,x) \in H(Q)$, имеющую в Q обобщенные производные V_t, V_x ,принадлежащие пространству $H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^1 (V_t\Phi)_{t_1}^{t_2}dx = \int_{t_1}^{t_2}\{\int_0^1[V_t\Phi_t - V_x\Phi_x + \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\Phi(t,x) + \delta(x-x_0)\, f[u(t)]\Phi(t,x)]dx - \alpha V(t,1)\Phi(t,1)\}dt,$$

при любых моментов времени $t_1, t_2 \ (0 \le t_1 \le t_2 \le T)$, и любой функции $\Phi(t,x) \in H_1(Q)$ и в слабом смысле начальным условием (2), т.е. при $t \to +0$ для любой функции $\Phi_0(x) \in H(Q)$ выполняются условия:

$$\int_0^1 [V(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_0(x)dx \to 0, \ \int_0^1 [V_t(t,x) - \psi_2(x)]\Phi_0(x)dx \to 0.$$

3. Постановка задачи синтеза точечного управления.

Будем рассматривать задачу синтеза точечного управления, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left[V(T,x) - \xi_1(x)\right]^2 + \left[V_t(T,x) - \xi_2(x)\right]^2 \right\} dx + \beta\int_0^T p^2[u(t)]dt, \beta > 0$$

на множестве решений краевой задачи (1)-(3), где $\xi_1(x) \in H(0,1), \ \xi_2(x) \in H(0,1)$ – заданные функции, описывающие желаемого состояния процесса в конечный времени $t = T$, причем управление $u(t)$ следует находит как функция(или функционал) от состояния управляемого процесса $V(t,x)$, т.е. в виде $u(t) = u[t, V(t,x)]$.

4. Вывод уравнения Беллмана

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана вводится функционал

$$S[t,W] = \min_{\substack{|u(\tau)| \le 1 \\ t \le \tau \le T}} \left\{ \int_0^1 \|W(T,x) - \xi(x)\|^2 dx + \beta\int_t^T p^2(u(\tau))d\tau \right\}, \qquad (4)$$

где $W(t,x) = (V(t,x), V_t(t,x))$, $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x))$, $\|\bullet\|$ – норма вектора.

Далее это равенство перепишем в виде

$$S[t,W] = \min_{\substack{|u(\tau)| \le 1 \\ t \le \tau \le t+\Delta t}} \left\{ \beta\int_t^{t+\Delta t} p^2(u(\tau))d\tau + S[t+\Delta t, W(t,x) + \Delta W(t,x)] \right\}, \qquad (5)$$

где

$$S[t+\Delta t, W(t+\Delta t, x)] = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t+\Delta t\le\tau\le T}} \left\{ \int_0^1 \|W(T,x)-\xi(x)\|^2 dx + \beta \int_{t+\Delta t}^{T} p^2(u(\tau))d\tau \right\}.$$

Отсюда предполагая, что $S[t,W]$ из (4) как функция, дифференцируема по t, а по W как функционал, дифференцируем по Фреше, получаем

$$S[t+\Delta t, W+\Delta W] = S[t, W(t,x)] + \frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t + dS[t,W,\Delta W] + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W), \quad (6)$$

где $\dfrac{\omega_2(t,u,\Delta u)}{\|\Delta u\|} \to 0$ при $\|\Delta u\| \to 0$.

Учитывая, что дифференциал Фреше является линейным функционалом относительно $\Delta W = (\Delta V, \Delta V_t)$, согласно теореме Рисса, имеем равенство

$$dS[t,W,\Delta W] = \left(m(t,x), \Delta W(t,x)\right) = \int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx = \int_0^1 (m_1(t,x)\Delta V(t,x) + m_2(t,x)\Delta V_t(t,x))dx,$$

где $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$ - градиент функционала $S[t,W]$.

Используя полученное значение функционала $S[t+\Delta t, W(t+\Delta t,x)]$, (6) подставляем в (5) и находим, что

$$-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \{\beta \int_t^{t+\Delta t} p^2\left(u(\tau)\right)d\tau + \int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W)\}. \quad (7)$$

Используя тождество

$$\int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx = \int_0^1 [m_2(t,x)V_t(t,x)]_t^{t+\Delta t} dx + \int_0^1 m_1(t,x)\Delta V(t,x) - \Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx \quad (7)$$

перепишем в виде

$$\begin{gathered} -\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \{\beta \int_t^{t+\Delta t} p^2\left(u(\tau)\right)d\tau + \int_0^1 [m_2(t,x)V_t(t,x)]_t^{t+\Delta t} dx + \\ + \int_0^1 m_1(t,x)\Delta V(t,x) - \Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W)\}. \end{gathered} \quad (8)$$

Тогда в (4), полагая $\Phi(t,x) = m_2(t,x)$ и $t_1 = t, \quad t_2 = t+\Delta t$ имеем тождество

$$\begin{gathered} \int_0^1 m_2(t,x)V_t(t,x)\Big|_{t_1}^{t_2} dx = -\alpha \int_t^{t+\Delta t} V(\tau,1)m_2(\tau,1)d\tau + \lambda\int_0^T K(\tau,s)V(s,x)dsm_2(\tau,x) + \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V_t(\tau,x)m_{2t}(\tau,x) - V_x(\tau,x)m_{2x}(\tau,x) + \delta(x-x_0)f(u(\tau))m_2(\tau,x)\right]dxd\tau, \end{gathered}$$

которое подставляя в (8), после деления на Δt получим соотношение

$$\begin{gathered} \frac{\partial S[t,W]}{\partial t} = \min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \frac{1}{\Delta t}\{\beta \int_t^{t+\Delta t} p^2(u(\tau))d\tau + \int_t^{t+\Delta t} (\int_0^1 [V_t m_{t2} - V_x m_{x2} + \lambda\int_0^T K(\tau,s)V(s,x)dsm_2 + \\ + \delta(x-x_0)f(u(\tau))m_2]dx - \alpha V(\tau,1)m_2(\tau,1))d\tau + \int_0^1 [m_1(t,x)\Delta V(t,x) - \Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx + \\ + o(\Delta t) + \omega_2(t,W,\Delta W)\}. \end{gathered}$$

Отсюда переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение типа Беллмана следующего вида

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\min_{|u|\le 1}\{\beta p^2[u(t)]+f[u(t)]m_2(t,x_0)+\int_0^1[V_t(t,x)m_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)]dx+$$
$$+\alpha V(t,1)m_2(t,1)+\lambda\int_0^1 m_2(t,x)\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau dx\}. \tag{9}$$

Это уравнение следует рассматривать вместе с дополнительными условиями

$$S[t,W(t,x)]\ge 0,\ S[T,W(T,x)]=\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|^2\,dx, \tag{10}$$

которые получены из определения функционала. Задача (9)-(10) называется задачей Коши-Беллмана.

5. О преобразовании задачи Коши-Беллмана

При решении задачи (9) -(10) основным препятствием стал наличие интегрального слагаемого. В этой связи профессором Керимбековым было предложено решение задачи искать в следующем виде

$$S[t,W]=S_0[t,W]+\lambda S_1[t].$$

Тогда в силу линейной независимости системы функций $\{1,\lambda\}$ задача (9)-(10) расщепляется на следующие задачи:

$$-\frac{\partial S_0[t,W]}{\partial t}=\min_{|u|\le 1}\{\beta p^2[u(t)]+f[u(t)]m_2(t,x_0)+\int_0^1[V_t(t,x)m_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)]dx+\alpha V(t,1)m_2(t,1)\},$$

$$S_0[T,W(T,x)]=\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|_{R_2}^2\,dx\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial S_1[t]}{\partial t}=\int_0^1 m_2(t,x)\int_0^T K(\tau,x)V(\tau,x)d\tau dx, \tag{12}$$

$$S_1[T]=0\,.$$

Отметим, что в этом случае, в силу линейности правой части уравнения (12) по $V(t,x)$, градиент $S[t,W(t,x)]$ равняется градиенту $S_0[t,W(t,x)]$.

Решения задачи (11) -(12) в общем случае решение задачи синтеза является очень трудным. Рассмотрим частный случай, когда функции $f[u],\ \forall t\in[0,T]$ и $p[u]$ удовлетворяют следующим условиям

$$f_u\ne 0,\ \ p(-1)=p(1)<p(u),\ |u|<1.$$

Пусть функция $f[u],\ \forall t\in[0,T]$ – монотонно возрастающая. Тогда искомое оптимальное управление определяется по формулам

$$u^0(t)=\begin{cases}-1, & m_2(t,x_0)>0,\\ 1, & m_2(t,x_0)<0,\end{cases}$$

И уравнение (11) в области $m_2(t,x_0)>0$ имеет вид

$$-\frac{\partial S_0[t,W]}{\partial t}=\beta p^2(-1)+f[-1]m_2(t,x_0)+\int_0^1[V_t(t,x)m_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)]dx+\alpha V(t,1)m_2(t,1)\} \tag{13}$$

Решение уравнения (13) будем искать в квадратичной форме следующего вида

$$S_0[t,W(t,x)]=\int_0^1\int_0^1 W^*(t,x)N(t,x,y)W(t,y)dydx+\int_0^1 W^*(t,x)q(t,x)dx+\eta(t). \tag{14}$$

Здесь

$N(t,x,y)=\begin{pmatrix} N_{11}(t,x,y) & N_{12}(t,x,y) \\ N_{21}(t,x,y) & N_{22}(t,x,y)\end{pmatrix}$ – квадратная матрица,

$q(t,x)=\begin{pmatrix} q_1(t,x) \\ q_2(t,x)\end{pmatrix}$ – вектор-функция, $\eta(t)$ – скалярная функция. Все они подлежат определению.

Согласно (24) нетрудно подсчитать

$$m(t,x)=\{m_1(t,x),m_2(t,x)\}=\int_0^1[N(t,x,y)+N(t,y,x)]W(t,y)dy+q(t,x). \quad (15)$$

Далее используем разложения

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x)=V^*(t)z(x)=z^*(x)V(t)\,,$$

$$V_t(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n{}'(t)z_n(x)=V^*{}'(t)z(x)=z^*(x)V'(t)\,, \quad (27)$$

$$N(t,x,y)=\sum_{n,k=1}^{\infty}z_n(x)R_{nk}(t)z_n(y)=z^*(x)R(t)z(y),$$

$R(t)$ - бесконечномерная квадратная матрица

$$R(t)=\left(R_{nk}(t)\right),\ \ n,k=1,2,3,..., \qquad R_{nk}(t)=\begin{pmatrix} R_{nk}^{11}(t) & R_{nk}^{12}(t) \\ R_{nk}^{21}(t) & R_{nk}^{22}(t)\end{pmatrix},\ \ n,k=1,2,3,..., \quad (16)$$

$$q(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)z_n(x)=z^*(x)q(t)\,,q_n(t)=\left(q_{n1}(t),q_{n2}(t)\right),\ n=1,2,3,....$$

(14) подставляя в (15) относительно неизвестных *R(t), q(t),* $\eta(t)$ получим следующие задачи

$$\begin{aligned} &-\dot{R}(t)=\tilde{D}(\lambda_n)R(t)+R(t)\tilde{D}^*(\lambda_n),\ \ R(T)=E \\ &-\dot{q}(t)=\tilde{D}(\lambda_n)q(t)+[R^*(t)+R(t)]F(-1,z(x_0)),\ \ q(T)=-2\xi \\ &-\dot{\eta}(t)=F^*(-1,z(x_0))q(t)+\beta p^2(-1),\ \ \ \eta(T)=\xi^*\xi \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tilde{D}(\lambda_n)=diag(...D(\lambda_n)...),\ D(\lambda_n)=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_n^2 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\ n=1,2,3,...,$

$$F[-1,z(x_0)]=(F_n[-1,z_n(x_0)),\ \ \ F_n[-1,z_n(x_0)]=\begin{pmatrix} 0 \\ f(-1)z_n(x_0)\end{pmatrix},\ n=1,2,3,...$$

6. Решение матричного дифференциального уравнения

Из (16) и первого уравнения (17) имеем

$$\begin{aligned} &\dot{R}_{nn}(t)=-D(\lambda_n)R_{nn}(t)-R_{nn}(t)D^*(\lambda_n),\ \ n=1,2,3,...; \\ &\dot{R}_{nk}(t)=-D(\lambda_n)R_{nk}(t)-R_{nk}(t)D^*(\lambda_k),\ \ \ n,k=1,2,3,.... \\ &R_{nn}(T)=E,\ \ R_{nk}(T)=\theta,\ \ \ n\neq k. \end{aligned}$$

Система уравнений при $n\neq k$

$\dot{R}_{nk}(t)=-D(\lambda_n)R_{nk}(t)-R_{nk}(t)D^*(\lambda_k)$ с условием $R_{nk}(T)=\theta$ имеет только тривиальное решение $R_{nk}(t)=\theta$.

Поэтому решаем только следующую матричную систему дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\dot{R}_{nn}(t) = -D(\lambda_n)R_{nn}(t) - R_{nn}(t)D^*(\lambda_n),$$

В расписанном виде второе и третье уравнения идентичны.

$$\begin{cases} \dot{R}_{nn}^{11}(t) = \lambda_n^2 R_{nn}^{21}(t) + \lambda_n^2 R_{nn}^{12}(t) \\ \dot{R}_{nn}^{12}(t) = \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t) - R_{nn}^{11}(t) \\ \dot{R}_{nn}^{21}(t) = -R_{nn}^{11}(t) + \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t) \\ \dot{R}_{nn}^{22}(t) = -R_{nn}^{12}(t) - R_{nn}^{21}(t) \end{cases}$$

Из равенства второго и третьего уравнений $\dot{R}_{nn}^{12}(t) = \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t) - R_{nn}^{11}(t) = \dot{R}_{nn}^{21}(t)$ и дополнительных условий $R_{nn}^{12}(T) = R_{nn}^{21}(T) = 0$ получаем

$$R_{nn}^{12}(t) = R_{nn}^{21}(t).$$

Вместе 4 уравнений будем рассматривать 3 уравнения

$$\begin{cases} \dot{R}_{nn}^{11}(t) = 2\lambda_n^2 R_{nn}^{12}(t), \\ \dot{R}_{nn}^{12}(t) = -R_{nn}^{11}(t) + \lambda_n^2 R_{nn}^{22}(t), \\ \dot{R}_{nn}^{22}(t) = -2R_{nn}^{12}(t), \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} R_{nn}^{11}(T) \\ R_{nn}^{12}(T) \\ R_{nn}^{22}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы

$$\begin{cases} R_{nn}^{11}(t) = \dfrac{\lambda_n^2 + 1}{2} + \dfrac{1 - \lambda_n^2}{2}\cos 2\lambda_n(T - t) \\ R_{nn}^{12}(t) = \dfrac{\lambda_n^2 - 1}{2\lambda_n}\sin 2\lambda_n(T - t) = R_n^{21}(t) \\ R_{nn}^{22}(t) = \dfrac{\lambda_n^2 + 1}{2\lambda_n^2} + \dfrac{\lambda_n^2 - 1}{2\lambda_n^2}\cos 2\lambda_n(T - t) \end{cases}$$

$$-\dot{q}(t) = \tilde{D}(\lambda_n)q(t) + 2R(t)F[-1, z(x_0)],\ q(T) = -2\xi .$$

Система имеет вид

$$q_n(t) = -D(\lambda_n)q_n(t) - 2R_{nn}(t)F_n[-1, z_n(x_0)],\ \ q_n(T) = -2\xi_n = -2\begin{pmatrix} \xi_{1n} \\ \xi_{2n} \end{pmatrix},\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Решение этого дифференциального уравнения

$$q_n(t) = 2\Phi_n(t,T)\xi_n - \int_t^T \Phi_n(t,\tau)R_{nn}(\tau)F_n[-1, z_n(x_0)]d\tau ,$$

где $\Phi_n(t,\tau) = \Phi_n(t)\Phi_n(\tau)$ - матрица Коши

Решаем скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt} = -\beta p(-1) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*[f(-1), z_n(x_0)]q_n(t).$$

Решение которого

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\xi_n\right\|_{R^2}^2 + \int_t^T \sum_{n=1}^{\infty} f(-1)z_n(x_0)q_{1n}(\tau)d\tau + \beta p(-1)(T - t).$$

Вывод.

По результатам исследований пришли к выводу, что $f[u(t)]$является монотонно возрастающей функцией для всех допустимых значений управления $u(t):\{-1\le u(t)\le 1\}$. Тогда в области, где $m_2(t,x_0)=m_2^-(t,x_0)>0$ искомое оптимальное управление тождественно равно $u^0(t)\equiv -1$, а в области, где $m_2(t,x_0)=m_2^+(t,x_0)<0$ искомое оптимальное управление тождественно равно $u^0(t)\equiv 1$.

Разрешимость задачи синтеза при нелинейном точечно оптимальном управлении возможно в следующих случаях:

1-случай. Пусть $m_2^-(t,x_0)>0$ для всех значений $t\in[0,T]$. Тогда единственным решением задачи синтеза является управление $u^0(t)\equiv -1$.

2-случай. Пусть $m_2^-(t,x_0)>0$ имеет на отрезке $[0,T]$ несколько нулей. Например предположим, что функция $m_2^-(t,x_0)$ имеет двух нулей в точках $t=t_1$ и $t=t_2$. И $m_2^-(t,x_0)>0$ на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_2,T]$, а на отрезке $[t_1,t_2]$, $m_2^-(t,x_0)<0$. В этом случае задача синтеза в целом не имеет решения, однако задача имеет решения лишь на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_2,T]$.

3- случай. Если при управлении управление $u^0(t)\equiv -1$ не существует области, где $m_2^-(t,x_0)>0$, то задача синтеза не имеет решения.

4-случай. Пусть $m_2^+(t,x_0)<0$ для всех значений $t\in[0,T]$. Тогда единственным решением задачи синтеза является управление $u^0(t)\equiv 1$;

5-случай. Пусть $m_2^+(t,x_0)$ имеет на отрезке [0,T] несколько нулей. Например, предположим, что функция $m_2^+(t,x_0)$ имеет двух нулей в точках $t=t_1$ и $t=t_2$. И $m_2^+(t,x_0)<0$ на отрезке $[t_1,t_2]$, на отрезках $[0,t_1]$ и $[t_2,T]$ произвольного знака. В этом случае задача синтеза в целом не имеет решения, однако задача имеет решения лишь на отрезке$[t_1,t_2]$.

6- случай. Если при управлении $u^0(t)\equiv 1$ не существует области, где $m_2^+(t,x_0)<0$, то задача синтеза не имеет решения.

7-случай. В случаях 2 и 5 задача синтеза в отдельности не имеет решения. Однако в точках t_1и t_2 возможен переход от управления $u^0(t)\equiv -1$ на управление $u^0(t)\equiv 1$. В этом случае задача синтезе в целом имеет решения. Точки t_1и t_2 называются точками переключения.

Аналогичные результаты получены для случая, когда $f[u(t)]$ является монотонно убывающей функцией для всех допустимых значений управления $u(t):\{-1\le u(t)\le 1\}$.

Литература

1. A. Kerimbekov, O., Tairova (2018). On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes.] IFAC-PapersOnLine: 17th IFAC workshop on control applications of optimization, Vol. 51, №32, pp. 754-758. Available at: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.455
2. Сиразетдинов, Т.К. (1977). Оптимизация систем с распределенными параметрами. Москва: Главная редакция физико-математической литературы.
3. Беллман, Р. (1960). Динамическое программирование. Москва: ИЛ.
4. Люстерник, Л.А., Соболев В.И. (1965). Элементы функционального анализа. Москва: Наука.
5. Егоров, А.И. (1988). Оптимальное управление линейными системами. Киев: Высшая школа.