УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_21

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА

Сатаров Арзымат Эминович, к.ф.-м.н., доцент
asatarov74@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи со смещением для уравнения смешанно-гиперболического типа с линией изменения типа* $y=0$*. Методом понижения порядка уравнений, разрешимость краевой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, относительно следа искомой функции на линии изменения типа уравнения. Использованием функции Грина получена соотношение между следа искомой функции и её нормальной производной. Понижением порядка уравнения и общих решений получено представление решение задачи для гиперболического уравнения 4-го порядка при* $y<0$*. Методом функции Грина для гиперболического уравнения 4-го порядка определено решение задачи при* $y>0$*.*

Ключевые слова: *краевые задачи, задачи со смещением, смешанно-гиперболический оператор, интегральные уравнения, функция Грина.*

4-ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ-ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЖЫЛЫШУУСУ БАР МАСЕЛЕ

Сатаров Арзымат Эминович, ф.-м.и.к., доцент
asatarov74@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Теңдеме тибинин өзгөрүүсү* $y=0$ *мүнөздүк сызыгы менен берилген 4-тартиптеги аралаш-гиперболалык теңдеме үчүн жылышуусу бар чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү ыкмасын колдонуу аркылуу, чек аралык маселенин чечилиши, теңдеменин тибинин өзгөрүү сызыгында изделүүчү функциянын изине карата экинчи түрдөгү Фредгольмдун интегралдык теңдемесин чыгарууга алып келинет. Гриндин функциясын колдонуу менен изделүүчү функциянын изи жана анын нормалдуу туундусунун ортосундагы байланыш алынат. Теңдеменин тартибин төмөндөтүү жана жалпы чыгарылышын тургузуу менен* $y<0$ *болгондо 4-тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн маселенин чечиминин көрүнүшү алынган.* $y>0$ *болгондо 4-тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн Гриндин функциясын колдонуу менен маселенин чечими аныкталган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселелер, жылышуусу бар маселелер, аралаш-гиперболалык оператор, интегралдык теңдемелер, Грин функциясы.*

PROBLEM WITH SHIFT FOR A MIXED-HYPERBOLIC EQUATION OF THE 4TH ORDER

Satarov Arzymat Eminovich,Candidate of Ph.and Math. Sc., Docent
asatarov74@mail.ru
Osh State University

Osh, Kyrgyzstan

Annotation: *A theorem of existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem with a shift for a mixed-hyperbolic equation with a line of change of type y=0 is proved. By the method of reducing the order of equations, the solvability of the boundary value problem is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind, relative to the trace of the unknown function on the line of change of the equation type. Using the Green's function, a relationship is obtained between the trace of the unknown function and its normal derivative. By reducing the order of the equation and general solutions, a representation of the solution to the problem for a hyperbolic equation of the 4th order for y>0 is obtained. Using the Green's function method for a hyperbolic equation of the 4th order, a solution to the problem is determined for y<0.*

Keywords: *boundary value problems, problems with displacement, mixed-hyperbolic operator, integral equations, Green's function.*

1. Постановка задачи. В области D, ограниченная отрезками прямых $AC: x+y=0,\quad CB: x-y=\ell,\quad BB_0: x=\ell,\quad B_0A_0: y=h,\quad A_0A: x=0$ рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxxy}+c(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxxx}-u_{xxyy}=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

где $c(x,y)$ – заданная функция, а $D_1=D\cap(y>0),\ D_2=D\cap(y<0).$

Отметим, что линия $x=const$ является простыми, $y=const$ – трехкратными характеристиками уравнения (1), а $y=const$ – двукратными, $x\pm y=const$ – простыми действительными характеристиками уравнения (2).

Уравнение (1) и (2) представляют собой канонические виды гиперболических уравнений в частных производных четвертого порядка относительно старших производных по классификации работы [1].

Различные краевые задачи, как для уравнения (1), так и для уравнения (2), рассмотрены в работах [2 - 16]. В данной работе изучается задача сопряжения со смещением для уравнений (1) и (2).

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap[C^{3+1}(D_1)\cup \cup C^{2+2}(D_2)\cup C^{4+0}(D_2)]$, удовлетворяющую в области $D\backslash(y=0)$ уравнениям (1), (2) и краевым условиям

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\beta(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2}\right)=\delta(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le \frac{\ell}{2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{BC}=\psi_2(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le \ell, \tag{5}$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{6}$$

$$u_x(\ell,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{7}$$

где n - внутренняя нормаль, $\alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x),\ \psi_i(x)(i=\overline{1,2}),\ \varphi_j(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем

$$\begin{aligned}&c(x,y)\in C(\bar{D}_1),\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \delta(x)\in C[0,\ell]\cap C^2(0,\ell),\\&\forall\, x\in[0,\ell]:\ \alpha(x)+\beta(x)\neq 0,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y)\in C^1[0,h],\\&\psi_1(x)\in C^4[0,\frac{\ell}{2}],\ \psi_2(x)\in C^4[\frac{\ell}{2},\ell],\ \psi_1'\left(\frac{\ell}{2}\right)+\psi_2'\left(\frac{\ell}{2}\right)=0.\end{aligned}\tag{9}$$

Отметим, что из постановки задачи 1, как следствие, вытекает условия сопряжения

$$\begin{aligned}&u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell,\\&u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell,\end{aligned}\tag{10}$$

где $\tau(x),\nu(x)$ – пока неизвестные функции. Условие со смещением вида (3) впервые рассмотрены в работах [6] и [7] при изучении краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.

2. Функциональное соотношение, полученное из области D_2. Пусть

$$u_{xx}-u_{yy}=z(x,y),\ (x,y)\in D_2,\tag{11}$$

где $z(x,y)$ – новая неизвестная функция. Тогда, из условий (4) и (5), имеем

$$u_{xx}(x,-x)-u_{yy}(x,-x)=\sqrt{2}\,\psi_1'(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2},\tag{12}$$

$$u_{xx}(x,x-\ell)-u_{yy}(x,x-\ell)=-\sqrt{2}\,\psi_2'(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell.\tag{13}$$

В силу обозначения (11), из (2), (12) и (13) для определения $z(x,y)$ получим следующую задачу Гурса

$$z_{xx}(x,y)=0,\ (x,y)\in D_2.\tag{14}$$

$$z(x,-x)=\sqrt{2}\,\psi_1'(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2},\tag{15}$$

$$z(x,x-\ell)=-\sqrt{2}\,\psi_2'(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell.\tag{16}$$

Представим общее решение уравнения (14) в виде

$$z(x,y)=F_1(y)+xF_2(y),\tag{17}$$

где $F_1(y),F_1(y)$ – произвольные непрерывные функции. Из условий (15), (16) для определения $F_1(y)$ и $F_2(y)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}&F_1(y)-yF_2(y)=\sqrt{2}\psi_1'(-y),\\&F_1(y)+(y+\ell)F_2(y)=-\sqrt{2}\psi_2'(y+\ell).\end{aligned}\tag{18}$$

Определяя из (18) неизвестные функции $F_1(y), F_1(y)$ и согласно формуле (17), получим решение задачи (14) - (16) в виде

$$z(x,y)=\sqrt{2}\psi_1'(-y)-\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2y+\ell}\left[\psi_1'(-y)+\psi_2'(y+\ell)\right],\ (x,y)\in D_2. \qquad (19)$$

Решение уравнения (11), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell,$$

представим в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y)+\tau(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(\xi)d\xi+\varPhi(x,y), \qquad (20)$$

где $\varPhi(x,y)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} z(\xi,\eta)d\xi$.

Используя условие (3) из (20) имеем

$$\tau'(x)-\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}\nu(x)=f(x), \qquad (21)$$

где $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)+\beta(x)}\left[2\delta(x)-\dfrac{1}{2}\alpha(x)\dfrac{d}{dx}\varPhi\left(\dfrac{x}{2},-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\beta(x)\dfrac{d}{dx}\varPhi\left(\dfrac{x+\ell}{2},\dfrac{x-\ell}{2}\right)\right]$.

3. Функциональное соотношение, полученное из области D_1.

Из уравнения (1) переходим к пределу при $y\to+0$ и учитывая краевые условия (6) и (7), имеем следующую задачу:

$$\begin{cases}\nu'''(x)=-c(x,0)\tau(x),\\ \nu(0)=\varphi_1'(0),\ \nu(\ell)=\varphi_2'(0),\ \nu'(\ell)=\varphi_3'(0).\end{cases} \qquad (22)$$

Для решения задачи (22) введем новую функцию $\nu_1(x)$:

$$\nu(x)=\nu_1(x)+g(x), \qquad (23)$$

где $g(x)=(1-\dfrac{2x}{\ell}+\dfrac{x^2}{\ell^2})\varphi_1'(0)+\dfrac{x}{\ell}\left(2-\dfrac{x}{\ell}\right)\varphi_2'(0)+x(\dfrac{x}{\ell}-1)\varphi_3'(0)$. Тогда для $\nu_1(x)$ получим задачу

$$\nu_1'''(x)=-c(x,0)\tau(x), \qquad (24)$$

$$\nu_1(0)=0,\ \nu_1(\ell)=0,\ \nu_1'(\ell)=0. \qquad (25)$$

Решение задачи (24), (25) относительно искомой функции $\nu_1(x)$ построим методом функции Грина. Представим функции Грина в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1+a_2x+a_3x^2,\ 0\le x\le\xi, \\ b_1+b_2x+b_3x^2,\ \xi\le x\le\ell, \end{cases} \tag{26}$$

где $a_i, b_i\ (i=\overline{1,3})$ - произвольные неизвестные коэффициенты, которые определяются из свойства функции Грина:

$$\begin{aligned} &G(0,\xi)=0,\ G(\ell,\xi)=0,\ G_x(\ell,\xi)=0, \\ &G(\xi+0,\xi)-G(\xi-0,\xi)=0, \\ &G_x(\xi+0,\xi)-G_x(\xi-0,\xi)=0, \\ &G_{xx}(\xi+0,\xi)-G_{xx}(\xi-0,\xi)=1. \end{aligned} \tag{27}$$

Из условий (27), нетрудно определить коэффициенты $a_i, b_i\ (i=\overline{1,3})$:

$$a_1=0,\ a_2=-\frac{\xi(\ell-\xi)}{\ell},\ a_3=-\frac{(\ell-\xi)(\ell+\xi)}{2\ell^2},\ b_1=\frac{\xi^2}{2},\ b_2=-\frac{\xi^2}{2},\ b_3=\frac{\xi^2}{2\ell^2}.$$

Следовательно, функция Грина представимо в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x(\ell-\xi)}{2\ell^2}(2\ell\xi-\ell x-\xi x),\ \ 0\le x\le\xi, \\ \dfrac{\xi^2(\ell-x)^2}{2\ell^2},\ \xi\le x\le\ell. \end{cases} \tag{28}$$

Тогда решение задачи (24), (25) имеет вид:

$$\nu_1(x)=-\int_0^\ell c(\xi,0)G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\,. \tag{29}$$

Из (29), с учетом (23), получим соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=g(x)-\int_0^\ell c(\xi,0)G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\,. \tag{30}$$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $\nu(x)$ из соотношений (21) и (30), имеем

$$\tau'(x)=-\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}\int_0^\ell c(\xi,0)G(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}g(x)+f(x)\,.$$

После интегрирования полученного соотношения, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau(x)=g_1(x)+\int_0^\ell K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\,, \tag{31}$$

где $$K(x,\xi)=-c(\xi,0)\int_0^x \frac{\beta(t)-\alpha(t)}{\alpha(t)+\beta(t)}G(t,\xi)dt, \qquad g_1(x)=\varphi_1(0)+\int_0^x f(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^x \frac{\alpha(\xi)-\beta(\xi)}{\alpha(\xi)+\beta(\xi)}d\xi.$$ Пусть $Q=\{(x,\xi):0<x<\ell,\ 0<\xi<\ell\}$.

Если выполняется условие

$$\ell\cdot\left\|K(x,\xi)\right\|_{C(\bar{Q})} \|<1, \tag{32}$$

то уравнение (31) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$\tau(x)=g_1(x)+\int_0^\ell R(x,\xi)g_1(\xi)d\xi, \tag{33}$$

где $R(x,\xi)$ – резольвента ядра $K(x,\xi)$. После определения $\tau(x)$, из (30) определим $\nu(x)$. Следовательно, решение задачи 1 в области D_2 определяется по формуле (20).

5. Решение задачи 1 в области D_1. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^{3+1}(D_1)$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1) и условиям (6), (7) и начальному условию $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell.$

Введем обозначение

$$u_y(x,y)=\upsilon(x,y),\ (x,y)\in D_1. \tag{34}$$

Тогда для определения $\upsilon(x,y)$ получаем следующую задачу:

$$\upsilon_{xxx}(x,y)=-c(x,y)u(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{35}$$

$$\upsilon(0,y)=\varphi_1'(y),\ \upsilon(\ell,y)=\varphi_2'(y),\ \upsilon_x(\ell,y)=\varphi_3'(y),\ 0\le y\le h, \tag{36}$$

Введем новую функцию $\upsilon(x,y)$:

$$\upsilon(x,y)=w(x,y)+\chi(x,y), \tag{37}$$

где $\chi(x,y)=(1-\frac{2x}{\ell}+\frac{x^2}{\ell^2})\varphi_1'(y)+\frac{x}{\ell}\left(2-\frac{x}{\ell}\right)\varphi_2'(y)+x(\frac{x}{\ell}-1)\varphi_3'(y)$. Тогда для $w(x,y)$ получаем следующую задачу:

$$w_{xxx}(x,y)=-c(x,y)u(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{38}$$

$$w(0,y)=0,\ w(\ell,y)=0,\ w_x(\ell,y)=0,\ 0\le y\le h. \tag{39}$$

Используя функции Грина (28), построенная в разделе 3, решение задачи (38), (39) сводится к уравнению

$$w(x,y)=-\int_0^\ell c(\xi,y)G(x,\xi)u(\xi,y)d\xi, \tag{40}$$

где $G(x,\xi)$ – определена по формуле (28). Из (38), с учетом (40), имеем

$$\upsilon(x,y)=\chi(x,y)-\int_0^\ell c(\xi,y)G(x,\xi)u(\xi,y)d\xi. \tag{41}$$

Тогда из (41), принимая во внимание (34), получим

$$u_y(x,y)=\chi(x,y)-\int_0^\ell c(\xi,y)G(x,\xi)u(\xi,y)d\xi. \tag{42}$$

Интегрируя уравнение (42) по y в пределах от 0 до y, получим интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$u(x,y)=\Phi(x,y)+\int_0^y d\eta\int_0^\ell K(x,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi,$$

где $K(x,\xi,\eta)=-c(\xi,\eta)G(x,\xi)$, $\Phi(x,y)=\tau(x)+\int_0^y \chi(x,\eta)d\eta,$ которое допускает единственное решение. Тем самым получим решение задачи 1 в области D_1.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (8), (9) и (32), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. - 448 с.
5. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.
6. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии, Учен. зап. Казан. ун-та., 1962, том 122, книга 3, 3– 16.
7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. - 287 с.
8. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1982.
9. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.
10. Бобылева Л.А., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. – 1972, №5. – С. 15-21.
11. Смирнов М.М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. №9. – С. 1678-1686.
12. Сатаров А.Э. Об одной краевой задаче для строго гиперболического уравнения четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук, Ош, 2001. – №3. – С. 153-157.
13. Сатаров А.Э. Задача сопряжения для уравнений в частных производных четвертого порядка // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. № 2 (53). – Алматы, 2007. – С. 39-48.
14. Сатаров А.Э. О краевых задачах для смешанно-гиперболического уравнения 4-го порядка с линией сопряжения x=0 // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 2024. (1(4), 185–192. https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_35
15. Абдумиталип уулу К. Краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором колебания струны // Вестник Ошского государственного университета. – Том 3. – № 1. – Ош, 2021. – С. 10-18.
16. Абдумиталип уулу К. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, содержащий параболо-гиперболический оператор // Вестник Ошского государственного университета. – № 1. – Ош, 2022. – С. 20-28.